cálculo I
diferencial

teoría / 476 problemas resueltos
414 ejercicios propuestos

álvaro pinzón

colección harper

6395
Estado 50 • RENACIMIENTO
35372

cãlculo I - diferencial

colección harper

cálculo I
diferencial

teoría
476 problemas resueltos
414 ejercicios propuestos

álvaro pinzón
Matemático de la Universidad Nacional de Colombia
Miembro de la Mathematical Society of America
y de la Mathematical Association of America

HARLA, S. A. de C. V.
Harper & Row Latinoamericana

México, Buenos Aires, Panamá, Bogotá

CALCULO I (DIFERENCIAL)
Primera edición

Copyright © 1973 por Harper & Row Latinoamericana, Harla, S. A. de C. V., Antonio Caso, 142, México, D. F., México. Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Registro N.° 723. Reservados todos los derechos. Queda terminantemente prohibido reproducir este libro total o parcialmente sin permiso expreso de los editores. Es propiedad.

Standard Book Number 06-316988-5

Dirección editorial: *Wenceslao Ortega*
Preparación técnica: *José Martínez Alaminos*
Cubierta e ilustraciones: *Secos Lanchas*

Cuidado y dirección técnica de HEROES, S. A. Editor.—Torrelara, 8.—Madrid - 16

Printed in Spain — Impreso en España

I.S.B.N. 84-339-0503-3

Depósito legal: M. 4.362-1973

HEROES, S. A.-Torrelara, 8.-Madrid-16

Contenido

PROLOGO 7

CAPITULO 1. **Números reales** 9

Los axiomas de cuerpo 9
Los axiomas de orden 11
Valores absolutos y desigualdad triangular 12
Algebra de los valores absolutos 25
Proximidad 28

CAPITULO 2. **Números naturales** 34

CAPITULO 3. **Límite de una función** 45

Definición de límite para funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (es decir, funciones que aplican reales en reales) 50
Teorema sobre límite de funciones 55
Teorema límite de la raíz de una función 57
Teorema del límite para funciones compuestas 57
Teorema del sandwich 58
Límites laterales 70
Límites que contienen infinito 78
Límites de la forma $\lim f(x)^{g(x)} = C$ 85

CAPITULO 4. **Continuidad y discontinuidad** 103

Preservación de la continuidad 103
Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas 104
Clasificación de las discontinuidades. Prolongación continua 105

CAPITULO 5. **La derivada** 124

Continuidad y derivabilidad 127
Derivación de funciones algebraicas 128
Derivación de las funciones trigonométricas 130
Derivación en cadena 132
Derivada de la función recíproca 133
Derivadas de orden superior 133
Derivación implícita 134
Derivación de ecuaciones paramétricas 136
Aplicaciones geométricas de la derivada 137
Angulo entre dos grafos 137
Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal 138

CAPITULO 6. **Diferenciales** 169

Diferenciales de órdenes superiores 170
Algebra de diferenciales 170

CAPITULO 7. **Razones y velocidad** 177

CAPITULO 8. **Funciones crecientes y decrecientes. Preservación del orden**... 188

Teorema del incremento local.......... 189
Extremos de las funciones. Máximos y mínimos.......... 190
Resumen de las técnicas para hallar máximos o mínimos.......... 192

CAPITULO 9. **Teorema del valor medio para primeras derivadas** 209

CAPITULO 10. **Teorema del valor medio para segundas derivadas** 246

Concavidad.......... 250

CAPITULO 11. **Trazado de grafos** 256

Construcción de curvas de la forma $y = f(x)$.......... 256
Curvas particulares.......... 256

APENDICE A. **Algebra** 277

APENDICE B. **Cálculo** 282

APENDICE C. **Geometría** 286

APENDICE D. **Geometría analítica plana** 289

APENDICE E. **Geometría analítica del espacio** 292

APENDICE F. **Trigonometría** 293

LISTA DE SIMBOLOS 297

GLOSARIO DE DEFINICIONES Y TEOREMAS 299

BIBLIOGRAFIA 305

INDICE 307

Tras un atento estudio de la teoría que abre cada capítulo, recuérdese que, como proceso de asimilación más indicado, se ha de tratar de resolver por propia cuenta los más posibles de los problemas y comparar después los resultados obtenidos con los que aparecen en el libro; y en ocasiones será muy provechoso revisar previamente los «trucos» lógicos, por así llamarlos, que permiten muchas veces emprender la resolución de un problema de aquellos que constituyen el «dolor de cabeza» de todo principiante. En suma, la colección de problemas que aquí se presenta obedece a la clara convicción de que todo curso de matemática tiene por columna vertebral el estudio y solución de ejercicios y problemas.

El autor desea manifestar su agradecimiento al profesor Jesús María Castaño por la revisión crítica de la obra y por sus valiosas sugerencias, así como a los señores Francisco Gutiérrez y Wenceslao Ortega, de Harper & Row Latinoamericana, por la colaboración y estímulo que en todo momento le brindaron.

A. PINZÓN

CAPITULO 1

Números reales

LOS AXIOMAS DE CUERPO

Al tratar con el conjunto **R** de números reales definimos la existencia de dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación*, tales que para cada par de números reales x y y podemos formar la *suma* de x y y, que no es otra cosa que el número real designado por $x + y$, y el *producto* de x y y designado por xy o por $x \cdot y$. Se supone que la suma $x + y$ y el producto xy están *unívocamente determinados* por x y y. En otras palabras, dados x y y, hay exactamente un número real $x + y$ y exactamente un número real xy. No damos ningún significado especial a los símbolos $+$ y $\cdot$ diferente del contenido en los axiomas.

Axioma 1. Leyes conmutativas. $x + y = y + x$, $xy = yx$.
Axioma 2. Leyes asociativas. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
Axioma 3. Ley distributiva. $x(y + z) = xy + xz$.
Axioma 4. Existencia de elementos neutros. Existen dos números reales diferentes que designamos por 0 y 1, tales que para cada número real x tenemos $x + 0 = x$ y $1 \cdot x = x$.
Axioma 5. Existencia de opuesto. Para cada número real x hay un número real y tal que $x + y = 0$.
Axioma 6. Existencia de inverso. Para cada número real $x \neq 0$ hay un número real y tal que $xy = 1$.

Nota. Los números 0 y 1 en los Axiomas 5 y 6 son los mismos del Axioma 4.

De los axiomas anteriores podemos deducir todas las leyes usuales del álgebra elemental. Las leyes más importantes están reunidas aquí como una lista de teoremas. En todos estos teoremas los símbolos a, b, c, d representan números reales arbitrarios.

Teorema 1-1. Ley cancelativa para la adición. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. (En particular, este teorema demuestra que el número 0 del Axioma 4 es único.)

Teorema 1-2. Posibilidad de sustracción. Dados a y b, hay exactamente un x tal que $a + x = b$. Este x se designa por $b - a$. En particular, $0 - a$ se escribe simplemente $-a$ y se llama el opuesto de a.

Teorema 1-3. $b - a = b + (-a)$.

Teorema 1-4. $-(-a) = a$.

Teorema 1-5. $a(b - c) = ab - ac$.

Teorema 1-6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Teorema 1-7. Ley cancelativa para la multiplicación. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. (En particular este teorema demuestra que el número 1 del Axioma 4 es único.)

Teorema 1-8. Posibilidad de división. Dados a y b con $a \neq 0$, hay exactamente un x tal que $ax = b$. Este x se designa por b/a o $\dfrac{b}{a}$ y se llama cociente de b y a. En particular, $1/a$ también se escribe a^{-1} y se llama inverso de a.

Teorema 1-9. Si $a \neq 0$, entonces $b/a = b \cdot a^{-1}$.

Teorema 1-10. Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Teorema 1-11. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Teorema 1-12. $(-a)b = -ab$ y $(-a)(-b) = ab$.

Teorema 1-13. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Teorema 1-14. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Teorema 1-15. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

Para ilustrar cómo estas proposiciones pueden obtenerse como consecuencia de los axiomas, presentamos las pruebas de los Teoremas 1-1 a 1-4. Aquellos lectores que tengan interés pueden encontrar instructivo demostrar los restantes teoremas.

Prueba de 1-1. Dado $a + b = a + c$. Por el Axioma 5, hay un número y tal que $y + a = 0$. Puesto que las sumas están unívocamente determinadas, tenemos $y + (a + b) = y + (a + c)$. Usando la ley asociativa obtenemos $(y + a) + b = (y + a) + c$ o $0 + b = 0 + c$. Pero por el Axioma 4 tenemos $0 + b = b$ y $0 + c = c$, de modo que $b = c$. Nótese que este teorema demuestra que hay solamente un número real que tiene la propiedad de 0 en el Axioma 4. En efecto, si 0 y 0' tienen ambos esta propiedad, entonces $0 + 0' = 0$ y $0 + 0 = 0$. Por tanto, $0 + 0' = 0 + 0$ y, por la ley cancelativa, $0 = 0'$.

Prueba de 1-2. Dados a y b, elegimos y de manera que $a + y = 0$ y sea $x = y + b$. Entonces $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$. De donde hay por lo menos un x tal que $a + x = b$.

Pero por el Teorema 1-1 hay a lo sumo un tal x. Por tanto, hay exactamente uno.

Prueba de 1-3. Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$. Deseamos probar que $x = y$. Ahora $x + a = b$ (por definición de $b - a$) y

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b$$

Por consiguiente, $x + a = y + a$, y de aquí, por el Teorema 1-1, $x = y$.

Prueba de 1-4. Tenemos $a + (-a) = 0$ por la definición de $-a$. Pero esta ecuación nos dice que a es el opuesto de $-a$. Esto es, $a = -(-a)$, como se quería.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Pruebe los Teoremas 1-5 a 1-15 usando los Axiomas 1 a 6 y los Teoremas 1-1 a 1-4.

En los Ejercicios 2 a 10 pruebe las proposiciones dadas o establezca la validez de las igualdades. Puede usar los Axiomas 1 a 6 y los Teoremas 1-1 a 1-15.

2. $-0 = 0$.

3. $1^{-1} = 1$.
4. Cero no tiene inverso.
5. $-(a + b) = -a - b$.
6. $-(a - b) = -a + b$.
7. $(a - b) + (b - c) = a - c$.
8. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
9. $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$ si $b \neq 0$.
10. $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/bd$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

LOS AXIOMAS DE ORDEN

Este grupo de axiomas tiene que ver con un concepto que establece un orden entre los números reales. Este orden nos permite hacer proposiciones acerca de un número real que es mayor o menor que otro. Elegimos, para introducir las propiedades de orden como un conjunto de axiomas, un nuevo concepto sin definir, llamado *positividad*, y luego definimos términos como menor que y mayor que en términos de positividad.

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$, llamado *conjunto de los números positivos*, el cual satisface los siguientes tres axiomas de orden:

Axioma 7. Si x y y están en $\mathbf{R}^+$, también estarán $x + y$ y xy.
Axioma 8. Para cada número real $x \neq 0$, o $x \in \mathbf{R}^+$ o $-x \in \mathbf{R}^+$, pero no ambos
Axioma 9. $0 \notin \mathbf{R}^+$

Ahora podemos definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, llamados, respectivamente, menor que, mayor que, menor que o igual a y mayor que o igual a, como sigue:

$x < y$ significa que $y - x$ es positivo;
$y > x$ significa que $x < y$;
$x \leq y$ significa que o $x < y$ o $x = y$;
$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Así, tenemos $x > 0$ si, y solo si, x es positivo. Si $x < 0$, decimos que x es negativo; si $x \geq 0$, decimos que x es no negativo. Un par de desigualdades simultáneas tales como $x < y$, $y < z$, se escriben más brevemente $x < y < z$; parecidas interpretaciones se dan a las desigualdades compuestas $x \leq y < z$, $x < y \leq z$ y $x \leq y \leq z$.

De los axiomas de orden podemos derivar todas las reglas usuales para operar con desigualdades. Las más importantes están anotadas aquí como teoremas.

Teorema 1-16. Ley de tricotomía. Para números reales arbitrarios a y b, exactamente una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$ es válida.

Teorema 1-17. Ley de transitividad. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Teorema 1-18. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Teorema 1-19. Si $a < b$ y $b > 0$, entonces $ac < bc$.

Teorema 1-20. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

Teorema 1-21. $1 > 0$.

Teorema 1-22. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Teorema 1-23. Si $a < b$, entonces $-a > -b$. En particular, si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Teorema 1-24. Si $ab > 0$, entonces ambos a y b son positivos o ambos son negativos.

Teorema 1-25. Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.

De nuevo probaremos solo unos pocos teoremas para indicar cómo pueden llevarse a cabo las demostraciones. Las pruebas de los otros se dejan como ejercicios.

Prueba de 1-16. Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$, y de aquí, por el Axioma 9, no podemos tener $a > b$ o $b > a$. Si $x \neq 0$, el Axioma 8 nos dice que o $x > 0$ o $x < 0$, pero no ambos; esto es, o $a < b$ o $b < a$, pero no ambos. Por tanto, exactamente una de las tres relaciones, $a = b$, $a < b$, $b < a$, es válida.

Prueba de 1-17. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $b - a > 0$ y $c - b > 0$. Por el Axioma 7 podemos sumar para obtener $(b - a) + (c - b) > 0$. Esto es, $c - a > 0$, y, por tanto, $a < c$.

Prueba de 1-18. Sea $x = a + c$, $y = b + c$. Entonces $y - x = b - a$. Pero $b - a > 0$ porque $a < b$. De aqui $y - x > 0$, y esto significa que $x < y$.

Prueba de 1-19. Si $a < b$, entonces $b - a > 0$. Si $c > 0$, entonces por el Axioma 7 podemos multiplicar c por $(b - a)$ para obtener $(b - a)c > 0$. Pero $(b - a)c = bc - ac$. De donde $bc - ac > 0$, y esto significa que $ac < bc$, como se afirmaba.

Prueba de 1-20. Si $a > 0$, entonces $a \cdot a > 0$ por el Axioma 7. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, y de aquí $(-a) \cdot (-a) > 0$ por el Axioma 7. En uno u otro caso tenemos $a^2 > 0$.

Prueba de 1-21. Aplicar el Teorema 1-20 con $a = 1$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

11. Pruebe los Teoremas 1-22 a 1-25 usando los teoremas anteriores y los Axiomas 1 a 9.

En los Ejercicios 2 a 10 pruebe las proposiciones dadas o establezca la validez de las desigualdades dadas. Puede usar los Axiomas 1 a 9 y los Teoremas 1-1 a 1-25.

12. No hay número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.

13. La suma de dos números negativos es negativa.

14. Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$; si $a < 0$, entonces $1/a < 0$.

15. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

16. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

17. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, y $a = c$, entonces $b = c$.

18. Para todo real a y b tenemos $a^2 + b^2 \geq 0$. Si a y b no son ambos cero, entonces $a^2 + b^2 > 0$.

19. No hay un número real a tal que $x \leq a$ para todo real x.

20. Si x tiene la propiedad de que $0 \leq x < h$ para todo número real positivo h, entonces $x = 0$.

VALORES ABSOLUTOS Y DESIGUALDAD TRIANGULAR

Los cálculos con desigualdades son bastante frecuentes; son de especial importancia cuando tratan con la noción de valor absoluto. Si x es un número real, el valor absoluto de x es un número real no negativo designado por $|x|$ y definido como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Observe que $-|x| \leq x \leq |x|$. Cuando los números reales son representados geométricamente sobre un eje real, el número $|x|$ se llama la distancia de x a 0. Si $a > 0$ y si un punto x está situado entre $-a$ y a, entonces $|x|$ está más cerca a 0 que a. La exposición analítica de este hecho se da por el siguiente teorema.

Teorema 1-26. Si $a \geq 0$, entonces $|x| \leq a$ si, y solo si, $-a \leq x \leq a$.

Prueba. Hay dos proposiciones para probar: la desigualdad $|x| \leq a$ implica las dos desigualdades $-a \leq x \leq a$ e, inversamente, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

Supongamos $|x| \leq a$. Entonces tenemos $-a \leq -|x|$. Pero o $x = |x|$ o $x = -|x|$, y de aquí $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Esto prueba la primera proposición.

Para probar el recíproco suponemos $-a \leq x \leq a$. Entonces si $x \geq 0$ tenemos $|x| = x \leq a$, mientras que si $x \leq 0$ tenemos $|x| = -x \leq a$. En uno u otro caso tenemos $|x| \leq a$, y esto completa la prueba.

La Figura 1-1 ilustra el significado geométrico de este teorema.

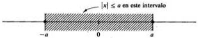


Figura 1-1

Como consecuencia del Teorema 1-26, es fácil derivar una importante desigualdad que establece que el valor absoluto de una suma de dos números reales no puede exceder la suma de sus valores absolutos.

Teorema 1-27. Para números reales arbitrarios x y y tenemos

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Nota. Esta propiedad se llama desigualdad triangular porque cuando se generaliza a vectores establece que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor que o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Prueba. Añadiendo las desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, obtenemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y de aquí, por el Teorema 1-26, concluimos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Si tomamos $x = a - c$ y $y = c - b$, entonces $x + y = a - b$ y la desigualdad triangular se convierte en

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|$$

Esta forma de la desigualdad triangular se usa a menudo en la práctica.

Usando la inducción matemática, podemos generalizar la desigualdad triangular como sigue.

Teorema 1-28. Para números reales arbitrarios $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Prueba. Cuando $n = 1$ la desigualdad es trivial, y cuando $n = 2$ la desigualdad es triangular. Asumimos, entonces, que es verdadera para n números reales. Entonces para $n + 1$ números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Por tanto, el teorema es verdadero para $n + 1$ si es verdadero para n. Por inducción, es verdadero para cada entero positivo n.

El siguiente teorema describe una importante desigualdad que se usa en conexión con el estudio de álgebra vectorial.

Teorema 1-29. La desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales arbitrarios, tenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) \tag{1-1}$$

El signo de igualdad es válido si, y solo si, hay un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Prueba. Tenemos $\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ para cada x real porque una suma de cuadrados no puede ser nunca negativa. Esto puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \tag{1-2}$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \; B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \; C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Queremos probar que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$, entonces cada $a_k = 0$, y $B = 0$ y el resultado es trivial. Si $a \neq 0$ podemos completar el cuadrado y escribir

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

El segundo miembro tiene su valor más pequeño cuando $x = -B/A$. Haciendo $x = -B/A$ en (1-2) obtenemos $B^2 \leq AC$. Esto prueba (1-1). El lector debería verificar que el signo de igualdad es válido si, y solo si, hay un x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo k.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1-1 Pruebe que si $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < (a + b)/2 < b$.

Solución. Si $a < b \Rightarrow a = \dfrac{a + a}{2} < \dfrac{a + b}{2} < \dfrac{b + b}{2} = b$.

Si $0 < a < b \Rightarrow a^2 < ab \Rightarrow a < \sqrt{ab}$. Además $(a - b)^2 > 0$; por tanto,

$$a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \Rightarrow (a + b)^2 > 4ab \Rightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$$

Problema 1-2 El máximo de los números x y y se representa por max (x, y). Así, max $(-1, 3) = 3$, max $(-1, -4) = -1$. Demuestre que

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2}, \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Solución. Si $x < y \Rightarrow |y - x| = y - x$; por tanto, $x + y + |y - x| = x + y + y - x = 2y$, que es $2 \max(x, y)$. Intercambiando x con y se demuestra la fórmula cuando $x \geq y$; el mismo modelo de razonamiento sirve para $\min(x, y)$.

Problema 1-3 Halle la parte entera del número $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Solución. Sea $[x]$ la parte entera del número x. Se tiene que $[x] \leq x \leq [x] + 1$. Como $1 \leq 1 \leq 1$,

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}7 \leq \sqrt{1/2} < 0{,}8 \\ 0{,}5 \leq \sqrt{1/3} < 0{,}6 \\ 0{,}5 \leq \sqrt{1/4} \leq 0{,}5 \\ 0{,}4 \leq \sqrt{1/5} < 0{,}5 \end{array}\right\} \text{ sumando se obtiene } 3{,}1 < x < 3{,}4 \Rightarrow [x] = 3.$$

Problema 1-4 Halle la parte entera de $y = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$.

Solución. Estudiemos la suma $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Para esto es necesario demostrar las desigualdades

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Como $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \dfrac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ y $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, entonces $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < 2/2\sqrt{n} = 1/\sqrt{n}$, lo cual demuestra la primera parte de (1); la otra parte es análoga. Si se hace $n = 2, 3, 4, \ldots$, en (1), se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < 1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2} - 2 \\ 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < 1/\sqrt{3} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} < 1/\sqrt{4} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sumando se obtiene } 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \\ + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2 \Rightarrow 2\sqrt{n+1} - \\ - 2\sqrt{2} + 1 < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \\ < 2\sqrt{n} - 1 \end{array} \tag{2}$$

Como $2\sqrt{2} < 3$ y $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, entonces (2) se convierte en

$$2\sqrt{n} - 2 < 1 + 1/\sqrt{2} + \ldots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n} - 1 \tag{3}$$

Haciendo $n = 1\,000\,000$ en (3), se obtiene

$$2\sqrt{1\,000\,000} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2\sqrt{1\,000\,000} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1998 < y < 1999 \therefore [y] = 1998$$

Problema 1-5 Demuestre la desigualdad $x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \ldots \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

Solución. Sea $y = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \ldots \dfrac{100}{101}$. Como $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6} < \dfrac{6}{7}, \ldots, \dfrac{99}{100} < \dfrac{100}{101} \Rightarrow x < y \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 < xy = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{6}{7} \ldots \dfrac{99}{100} \cdot \dfrac{100}{101} = \dfrac{1}{101} \Rightarrow x < \dfrac{1}{\sqrt{101}} < 0{,}1$.

Problema 1-6 Pruebe las desigualdades

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}.$$

Solución. En las desigualdades $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$, se hace $n=m, m+1, \dots, n$.

$$\left.\begin{aligned}
2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m} &< \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{m}-2\sqrt{m-1}\\
2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1} &< \frac{1}{\sqrt{m+1}} < 2\sqrt{m+1}-2\sqrt{m}\\
2\sqrt{m+3}-2\sqrt{m+2} &< \frac{1}{\sqrt{m+2}} < 2\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} &< \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}
\end{aligned}\right\}$$

sumando $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{m}<\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{m-1}$.

Problema 1-7 Si el producto de n números positivos es igual a 1, su suma no es menor que n.

Solución. (Inducción.) $(x_1-x_2)^2\geq 0 \Rightarrow x_1^2x_2^2\geq 2x_1x_2$. Si x_1, x_2 son positivos, al dividir esta última desigualdad por x_1x_2 se obtiene

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geq 2 \tag{1}$$

Si $xy=1$, $y=1/x$. Haciendo $x_1=x$ y $x_2=1$ en (1) se obtiene $x+1/x\geq 2$.

Suponga que el resultado es verdadero para $n=k\geq 2$. Es decir, $x_1+x_2+\dots+x_k\geq k$ si $x_1x_2\dots x_k=1$.

Sean $x_1>0, x_2>0, \dots, x_k>0, x_{k+1}>0$. Observe que si $x_1x_2x_3\dots x_{k+1}=1$, se presentan dos casos: primero, $x_1=x_2=\dots=x_{k+1}$; segundo, algunos factores son diferentes.

En el primer caso todos los términos son iguales a 1 y su suma es $k+1$. En el segundo caso, entre los términos del producto $x_1x_2\dots x_kx_{k+1}$, se encuentran factores mayores y menores que 1.

Por ejemplo, sea $x_1<1$ y $x_{k+1}>1 \Rightarrow (x_1x_{k+1})x_2x_3\dots x_k=1$. Haciendo $y_1=x_1x_{k+1}$ se obtiene

$$y_1x_2x_3\dots x_k=1 \text{ y } y_1+x_2+x_3+\dots+x_k\geq k$$

Pero $x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}=(y_1+x_2+\dots+x_k)+x_{k+1}-y_1+x_1\geq k+x_{k+1}-y_1+x_1=$
$=(k+1)+x_{k+1}-y_1+x_1-1$.

Como $x_1<1$ y $x_{k+1}>1 \Rightarrow (x_{k+1}-1)(1-x_1)>0$, de lo cual se sigue que

$$x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}\geq(k+1)+(x_{k+1}-1)(1-x_1)>k+1$$

Problema 1-8 Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son números positivos $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+$ $+\frac{x_n}{x_1}\geq n$, y la igualdad se verifica solamente si $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Solución. Como $\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\dots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}=1$, la desigualdad es consecuencia del problema anterior. El signo de igualdad es válido solamente cuando $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\dots=\frac{x_n}{x_1}=1$, es decir, si $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Problema 1-9 Pruebe la desigualdad $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}>2$.

Solución. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Como el producto de los términos de la derecha es igual a 1, su suma no es menor que 2. La igualdad se verifica solamente si $x = 0$.

Problema 1-10 Pruebe que $\log_{10} a + \log_{10} 10 \geq 2$.

Solución. Como $\log_a 10 \log_{10} a = 1 \Rightarrow \log_{10} a + \log_a 10 = \log_{10} a + \log_{10} (1/a) \geq 2$.

Problema 1-11 Demuestre la desigualdad $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$.

Solución. Como $\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}$ y como $\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2$, y, por tanto, $\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Problema 1-12 Muestre que la media geométrica de números positivos no es mayor que la media aritmética de los mismos números, positivos. Se obtiene la igualdad estricta en el caso de que todos los números no sean iguales.

Solución. Sea $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \Rightarrow 1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \ldots \frac{x_n}{g}}$ o $\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \ldots \frac{x_n}{g} = 1$. Como el producto de n números positivos es 1, entonces, por el Problema 1-8, su suma no es menor que n, es decir,

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \ldots + \frac{x_n}{g} \geq n \Rightarrow a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq g$$

La igualdad se verifica solamente cuando $\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \ldots = \frac{x_n}{g} = 1$, es decir, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$.

Problema 1-13 Halle el paralelepípedo rectángulo de máximo volumen si la suma de las tres dimensiones es dada.

Solución. Sea $m = a + b + c$ la suma de las longitudes de los lados y $V = abc$. Como

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow V \leq \frac{m^3}{27}$$

el signo de igualdad se obtiene cuando $a = b = c = m/3$, es decir, cuando es un cubo.

Problema 1-14 Pruebe la desigualdad $n! < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \geq 2$.

Solución. Por el Problema 1-12 se obtiene

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Definición. El número $C_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$ se llama media exponencial de orden α de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En particular, si $\alpha = 1$ se obtiene la media aritmética de dichos números.

Si $\alpha = 2$ se obtiene $C_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}$, que se llama media cuadrática, y para $\alpha = -1$, es

$$C_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$, que se llama media armónica.

Problema 1-15 Muestre que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y $\alpha < 0 < \beta$, $C_\alpha \le g \le C_\beta$.

Solución. Como $\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \ldots a_n^\alpha} \le \dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}$ elevando a la potencia $\dfrac{1}{\alpha}$ y como $\dfrac{1}{\alpha} < 0$ se obtiene $g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \ge \left(\dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = C_\alpha$.

Esto demuestra la primera parte de la desigualdad. La segunda parte es similar. Como consecuencia de lo anterior, la media armónica C_{-1} no supera a la media geométrica C_1.

Problema 1-16 Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2.$$

Solución. Como $C_{-1} \le g \le C_1$

$$C_{-1} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = C_1 \Rightarrow n^2 \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Problema 1-17 Pruebe que para cualquier par de números positivos a, b $(a \ne b)$ se tiene que

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n+1}$$

Solución. $\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n}} < \dfrac{a + b + b + \ldots + b}{n+1} = \dfrac{a + nb}{n+1}.$

Problema 1-18 Pruebe que $x_n = (1 + 1/n)^n$ y $z_n = (1 - 1/n)^n$ son crecientes.

Solución. Sea $a = 1$, $b = 1 + 1/n$, en el problema anterior, entonces

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

elevando a la potencia $(n + 1)$ se obtiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ es decir, } x_n < x_{n+1}$$

La segunda parte se demuestra en forma análoga.

Problema 1-19 Pruebe que $y_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ es decreciente, es decir, que $y_n > y_{n+1}$.

Solución. $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \dfrac{1}{z_n + 1}$, como z_n crece $\Rightarrow y_n$ decrece.

Problema 1-20 Pruebe la desigualdad $na_1 a_2 \ldots a_n \le a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n$ con $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$.

Solución. Como la media geométrica no excede a la media aritmética,

$$a_1a_2 \dots a_n = \sqrt[n]{a_1^n a_2^n \dots a_n^n} \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n} \Rightarrow na_1a_2 \dots a_n \leq a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n$$

Problema 1-21 Desigualdades relacionadas con $(1 + x)^\alpha$.

a) Si $x \geq -1$ y $0 < \alpha < 1 \Rightarrow (1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$. (1)

b) Si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$ $\Rightarrow (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$. (2)

La igualdad se obtiene en (1) y (2) si $x = 0$.

Solución. *a*) Suponga que α es un número racional y $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha = m/n$, m y n enteros positivos, $1 \leq m < n$, entonces $(1 + x)^\alpha = (1 + x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1 + x)^m 1^{n-m}} = \sqrt[n]{\underbrace{(1 + x)(1 + x)\dots(1 + x)}\underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}} \leq$

$$\leq \frac{(1 + x) + (1 + x) + \dots + (1 + x) + 1 + 1 + \dots + 1}{n} = \frac{m(1 + x) + n - m}{n} = \frac{n + mx}{n} =$$

$$= 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x$$

Se utilizó la desigualdad $C_\alpha \leq C_\beta$. El signo de igualdad se obtiene cuando los factores del radical son iguales, es decir, cuando $1 + x = 1$, $x = 0$. Si $x \neq 0$, $(1 + x)^\alpha < 1 + x\alpha$. Ahora suponga que α es irracional y $0 < \alpha < 1$.

Sean $r_1, r_2, \dots, r_n$ una sucesión de racionales cuyo límite es α y $0 < r_n < 1$. De las desigualdades $(1 + x)^{r_n} \leq 1 + r_n x$, $x \geq -1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, se sigue que

$$(1 + x)^\alpha = \lim_{r_n \to \alpha} (1 + x)^{r_n} \leq \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) = 1 + \alpha x$$

La cual demuestra (1) para valores racionales de α. Queda por demostrar que para $x \neq 0$ y $0 < \alpha < 1$, $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$.

Sea r tal que $0 < r < 1$. $(1 + x)^\alpha = [(1 + x)^{\alpha/r}]^r$; como $0 < \alpha/r < 1$, por lo demostrado anteriormente, $(1 + x)^{\alpha/r} \leq 1 + \alpha/r\, x$. Entonces $(1 + x)^\alpha \leq (1 + \alpha/r\, x)^r$.

Si $x \neq 0 \Rightarrow (1 + \alpha/r\, x)^r < 1 + r\, \alpha/r\, x = 1 + \alpha x$, es decir, $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$.

b) Sea $\alpha > 1$. Si $1 + \alpha x < 0$, la desigualdad (2) es obvia porque el término de la izquierda es positivo y el de la derecha negativo. Si $1 + \alpha x \geq 0$, $\alpha \geq -1$. Por la primera parte se tiene que

$$(1 + \alpha x)^{1/\alpha} \leq 1 + 1/\alpha\, \alpha x = 1 + x \Rightarrow 1 + \alpha x \leq (1 + x)^\alpha$$

Ahora sea $\alpha < 0$. Si $1 + \alpha x < 0$, la desigualdad (2) es evidente. Si, por otra parte, $1 + \alpha x \geq 0$, elija un entero positivo n tal que la desigualdad $-\frac{\alpha}{n} < 1$ se verifique. Por la primera parte se obtiene

$$(1 + x)^{-\alpha/n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}x \Rightarrow (1 + x)^{\alpha/n} \geq \frac{1}{1 - \alpha/n\, x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n}x$$

(la última desigualdad se justifica porque $1 \geq 1 - \frac{\alpha^2}{n^2}x^2$).

Al elevar a la potencia n se obtiene $(1 + x)^\alpha \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}x\right)^n \geq 1 + n\frac{\alpha}{n}x = 1 + \alpha x$.

Cuando $x = 0$ se obtiene la igualdad.

Problema 1-22 Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números positivos y $\alpha < \beta \Rightarrow C_\alpha \leq C_\beta$ y $C_\alpha = C_\beta$ si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Solución. Se demostró este problema (Problema 1-15) para el caso en que α y β son de signos opuestos. Ahora se va a demostrar el resultado en el caso de que α y β son del mismo signo. Suponga que $0 < \alpha < \beta$ y sea $k = C_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$. Al dividir C_β por k se obtiene

$$\frac{C_\beta}{k} = \frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \dots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \quad (1)$$

Haciendo $d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha, d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha, \dots, d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$ se obtiene $\frac{C_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha}}{n}\right)^{1/\beta}$:

Como $\left(\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{k} C_\alpha =$

$= \frac{1}{C_\alpha} C_\alpha = 1$; por tanto, $\frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} = 1 \Rightarrow d_1 + d_2 + \dots + d_n = n$.

Sea $d_1 = 1 + x_1, d_2 = 1 + x_2, \dots, d_n = 1 + x_n$; al remplazar $d_1 + d_2 + \dots + d_n = n$ se obtiene $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Con $\beta/\alpha > 1$,

$$\text{(A)} \quad \left\{\begin{array}{l} d_1^{\beta/\alpha} = (1 + x_1)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \beta/\alpha\, x_1 \\ d_2^{\beta/\alpha} = (1 + x_2)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \beta/\alpha\, x_2 \\ \vdots \\ d_n^{\beta/\alpha} = (1 + x_n)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \beta/\alpha\, x_n \end{array}\right\} \text{ al sumar } d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha} \geq n + \beta/\alpha(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que $\frac{C_\beta}{k} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{1/\beta} = 1 \Rightarrow C_\beta \geq k = C_\alpha$.

Observe que $C_\beta = k = C_\alpha$, análogamente cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. En este caso, $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ y, consecuentemente, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = k$. Si los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ no son todos iguales, $C_\beta > C_\alpha$. Si $\alpha < \beta < 0 \Rightarrow 0 < \beta/\alpha < 1$. Razonando como en el caso anterior se obtienen las desigualdades opuestas de (A) y (2).

Pero como $\beta < 0$, entonces de la desigualdad

$$\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha}}{n} < 1 \Rightarrow \frac{C_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \dots + d_n^{\beta/\alpha}}{n}\right)^{1/\beta} \geq 1^{1/\beta} = 1 \quad \therefore \quad C_\beta > k = C_\alpha$$

Nota. De este ejemplo se sigue que $C_{-1} \leq C_0 \leq C_1 \leq C_2$.

Problema 1-23 Pruebe que $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ si $x + y + z = 6$.

Solución. Como la media aritmética no excede a la media cuadrática

$$\frac{x + y + z}{3} \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^{1/2}, \text{ es decir, } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{6^2}{3} = 12$$

Problema 1-24 Pruebe que si x, y, z son números positivos y $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, entonces $x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solución. Como $C_2 \leq C_3$, $\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^{1/3}$. Según el problema anterior,

$$\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^{1/3} \geq \sqrt{\frac{8}{3}}, \text{ es decir, } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Problema 1-25 Pruebe que para números positivos se tienen las siguientes desigualdades:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^\alpha \leq n^{\alpha - 1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha), \alpha \geq 1 \quad (1)$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^\alpha \geq n^{\alpha - 1}(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha), 0 < \alpha \leq 1 \quad (2)$$

Solución. Si $\alpha > 1$, $C_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = C_1 \Rightarrow$ (1).

(2) se demuestra de la misma manera.

Problema 1-26 Pruebe que si $0 > \alpha > -1$,

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Solución. Como $0 < \alpha + 1 < 1$, por la desigualdad $(1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x$, se obtiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 + \frac{\alpha+1}{n} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1 - \frac{\alpha+1}{n}$$

Al multiplicar las desigualdades por $n^{\alpha+1}$ se obtiene

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} + (\alpha+1)\, n^{\alpha} \quad ; \quad (n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1} - (\alpha+1)\, n^{\alpha}$$

lo cual implica las dos desigualdades del problema.

Problema 1-27 Pruebe que si $0 > \alpha > -1 \Rightarrow \dfrac{(n+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^{\alpha} + (m+1)^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} < \dfrac{n^{\alpha+1} - (m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Solución. En las desigualdades del problema anterior, sea $n = m, m+1, \dots, n$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(m+1)^{1+\alpha} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha} < m^{\alpha} < \dfrac{m^{1+\alpha} - (m-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ \dfrac{(m+2)^{1+\alpha} - (m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < (m+1)^{\alpha} < \dfrac{(m+1)^{\alpha+1} - m^{1+\alpha}}{1+\alpha} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{1+\alpha}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \dfrac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \end{array}\right\} \text{ al sumar se obtiene el resultado.}$$

Por ejemplo, halle la parte entera de $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$ *Resp:* $[x] = 14\,996$

Problema 1-28 Pruebe que para $n \ge 3$ se verifica la desigualdad $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$.

Solución. Se demostró que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} < e \Rightarrow (n+1)^{n} < en^{n}$.

Si $n \ge 3 > e$, entonces $(n+1)^{n} < en^{n} < 3n^{n} \le nn^{n} = n^{n+1}$.

Elevando a la potencia $\dfrac{1}{n(n+1)}$ se obtiene $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$.

Problema 1-29 Pruebe la desigualdad $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

Solución. Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e$ y $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$ se obtiene $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Tomando logaritmos, tenemos que

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Problema 1-30 Pruebe las desigualdades

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \alpha > 0$$

Solución. Como $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + 1 > 1$ y, consecuentemente,

$$\left.\begin{array}{l} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 + \frac{1+\alpha}{n} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} > 1 - \frac{1+\alpha}{n} \end{array}\right\} \text{ al multiplicar por } n^{1+\alpha} \text{ se obtiene}$$

$$\left.\begin{array}{l} (n+1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} + (1+\alpha)\,n^{\alpha} \\ (n-1)^{1+\alpha} > n^{1+\alpha} - (1+\alpha)\,n^{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n^{1+\alpha} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

Al escribir las desigualdades para $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, tenemos que

$$\frac{1}{1+\alpha} < 1 < \frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha}$$

$$\frac{2^{1+\alpha} - 1}{1+\alpha} < 2^{\alpha} < \frac{3^{1+\alpha} - 2^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n^{(1+\alpha)} - (n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\text{Sumando:} \quad \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < 1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha} < \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{1+\alpha} < \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

21. Halle el conjunto solución de:

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$. *Resp.:* $(1, 2)$

b) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$, $a < b < c$. *Resp.:* (a, b) y (c, ∞)

c) $|1 - x| - x \geq 0$. *Resp.:* $]-\infty, 1/2]$

d) $\dfrac{x-a}{x+a} \geq 0$. *Resp.:* $(-\infty, -|a|)$, $(|a|, \infty)$

Incluya el punto $x = a$ en el intervalo apropiado cuando $a \neq 0$.

e) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \leq 6$. *Resp.:* $(3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8})$, $(-3 - \sqrt{8}, -3 + \sqrt{8})$

f) $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Resp.:* $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi, \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$

22. Pruebe que dado $a \geq 0$ y $x > 0 \Rightarrow \dfrac{ax^2 + b}{2x} \geq \sqrt{a}$. ¿Para qué valor de x se cumple la igualdad?

23. Pruebe que si $a \leq x \leq b \Rightarrow |x| \leq |a| + |b|$.

24. La media armónica ξ de dos números a, b se define como $\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

Pruebe que la media armónica ξ no excede la media geométrica, es decir, $\xi \leq \sqrt{ab}$. ¿Cuándo son iguales?

25. Pruebe las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + yx + y^2 \geq 0$.

b) $x^{2n} + x^{2n-1}y + \ldots + y^{2n} \geq 0$.

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

¿Cuándo se tiene igualdad?

Indicación. *a)* $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4}$ igualdad si $x = y = 0$.

b) $x^{2n} + x^{2n-1}y \dot{+} \ldots + y^{2n} = (x^{2n+1} - y^{2n+1})/(x - y) = (2n+1)\,x^{2n}$.

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 1) = \left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right](x-1)^2$.

26. Pruebe que $|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$, con $a_1 < a_2 < a_3$. ¿Para qué valores de x se verifica la igualdad?

a) Halle el valor máximo de y para todo x, tal que $|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_n| \geq$ $\geq y$, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. ¿En qué condiciones hay igualdad?

b) Si n es par, $n = 2m \Rightarrow y = (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{m+1}) - (a_1 + \ldots + a_m)$, la desigualdad se verifica si $a_m \leq x \leq a_{m+1}$. Cuando n es impar, $n = 2m - 1$, $y = (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{m+1}) - (a_1 + \ldots + a_{m-1})$ y se tiene igualdad si $x = a_m$.

27. Muestre que las siguientes desigualdades son verdaderas si a, b y c son positivos:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
b) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.
c) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$.

Indicación. *a*) Sume: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$.

b) Multiplique: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.
c) Sume tres desigualdades del tipo $a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2ac$.

28. Suponga que los números $x_1 x_2, x_3$ y $a_{ik} (i,k = 1,2,3)$ son todos positivos y que $a_{ik} \leq M$ y $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Pruebe que $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{33}x_3^2 \leq 3M$.

Indicación. Observe que $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_3^3x_3^2 \leq M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2M(x_1x_2 + x_2x_3 +$ $+ x_3x_1)$ y aplique la desigualdad de Cauchy a los números (x_1, x_2, x_3) y (x_2, x_3, x_1).

29. Pruebe la siguiente desigualdad y dé su interpretación geométrica para $n \leq 3$:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)} + \sqrt{(b_1^2 + \ldots + b_n^2)}$$

Indicación. Eleve ambos lados al cuadrado y emplee la desigualdad de Cauchy. Para el triángulo con vértices $0 = (0, \ldots, 0)$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ la suma de los lados OA y OB del triángulo es mayor que o igual al tercer lado.

30. Pruebe e interprete geométricamente para $n \leq 3$.

$$\sqrt{(a_1 + b_1 + \ldots + z_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n + \ldots + z_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2} + \ldots + \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}$$

Indicación. Elevando al cuadrado y aplicando la desigualdad de Cauchy se obtiene:

$$[(a_1 + b_1)^2 + (c_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2]^{1/2} \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$$

Entonces $[(a_1 + b_1 + c_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n + c_n)^2]^{1/2} = \{[(a_1 + b_1) + c_1]^2 + \ldots + [(a_n + b_n) + c_n]^2\}^{1/2} \leq$ $\leq [(a_1 + b_1)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2]^{1/2} + \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2}$.

El resultado general se obtiene aplicando este esquema.

Para los puntos $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $Z = (a_1 + b_1 +$ $+ \ldots + z_1, a_2 + b_2 + \ldots z_2, a_n + b_n + \ldots + z_n)$, la desigualdad significa que el segmento OZ es más corto que la poligonal que une los puntos $O, A, B, \ldots, Z$.

31. Muestre que la media geométrica de n números positivos no es mayor que la media aritmética, es decir, si $a_i > 0$, $i = 1, 1, \ldots, n$, entonces $\sqrt{a_1a_2, \ldots, a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Indicación. Sea $\alpha = \sqrt{a_1a_2, \ldots, a_n}$ y suponga que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Remplace a_n por α y a_1 por a_1a_n/α, de manera que la media geométrica de las n cantidades no cambie. Se tiene que $a_1 \leq \alpha \leq a_n$ y, por tanto,

$$a_1^* + a_n^* = \alpha + \frac{a_1a_n}{\alpha} = a_1 + a_n + \frac{\alpha^2 - \alpha(a_1 + a_n) + a_1a_n}{\alpha} = a_1 + a_n - \frac{(\alpha - a_1)(a_n - \alpha)}{\alpha} \leq a_1 + a_n$$

Así, el efecto del remplazo es dejar invariable la media geométrica sin aumentar la media aritmética. Repita el proceso hasta que todos los valores a_i se hayan remplazado por α, de donde se obtiene la conclusión.

32. Pruebe que $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Indicación. Por inducción, si $n = 1$ se tiene que $2(\sqrt{2} - 1) < 1 < 2$.
Si el resultado es verdadero para n, entonces

$$2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \quad \text{Pero} \quad 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{2(n + 3/2)}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n^2 + 3n + 9/4}}{\sqrt{n+1}} > \frac{2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+2}$$

Entonces

$$2(\sqrt{n+2} - 1) < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Por otra parte, $2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{2\sqrt{(n+1/2)^2} + 1}{\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$$

33. Pruebe que para $x, y > 0$, $\dfrac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$

Interprete el resultado geométricamente en términos del grafo de x^n.

Indicación. Para $n = 1$, la desigualdad se verifica. Si la desigualdad es verdadera para $n = k$, entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1} \leq \left(\frac{x^k + y^k}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{4} + \frac{xy^k + yx^k}{4}$$

Observe que $(x - y)(y^k - x^k) \geq 0$ y $x^{k+1} + y^{k+1} \geq xy^k + yx^k$.

Aplicando este resultado se obtiene la conclusión deseada. El punto medio de la cuerda que une los puntos del grafo está por encima del grafo.

34. Si $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, pruebe que $n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

Indicación. Como $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ se tiene que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [(a_i b_i + a_j b_j) - (a_i b_j + b_i a_j)] \leq 2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

35. Muestre que $1{,}998 < \sum_{1}^{10^6} \dfrac{1}{\sqrt{n}} <. 1{,}999$.

Indicación. Recuerde que $\sum_{1}^{10^6} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{10^6}}$.

Utilice la desigualdad $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ $n = 1, 2, 3, \dots$

36. Determine el número máximo de partes en que n rectas dividen al plano. Muestre que el máximo ocurre cuando dos rectas no son paralelas y tres no se cortan en un punto común. Determine el número de partes cuando se permite la concurrencia y el paralelismo.

Indicación. Sea λ_n el número máximo de partes en que n rectas dividen al plano. Considerando la recta $n + 1$, esta recta divide cada región que la contiene en dos partes. Entonces $\lambda_{n+1} = \lambda_n + (n + 1)$ si la recta $n + 1$ no es paralela a ninguna de las rectas anteriores. Por inducción se sigue que

$$\lambda_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Para cada par de rectas paralelas, λ_n se reduce en 1, porque se elimina un cruce. Si hay k familias de rectas paralelas con $p_1, p_2, \ldots, p_k$ rectas en las respectivas familias, entonces λ_n se reduce en

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} p_i(p_i - 1)$$

Análogamente, si una recta corta la intersección de dos rectas, el número de regiones cruzadas se reduce en 1. Si suponemos que j familias de rectas concurren con $c_1, c_2, \ldots, c_j$ rectas, en las respectivas familias, entonces λ_n se reduce en

$$\sum_{\mu=1}^{j} \frac{1}{2} (c_\mu - 1)(c_\mu - 2)$$

Así, en general, el número de regiones que forman en rectas es

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i(p_i - 1)}{2} - \sum_{\mu=1}^{j} \frac{1}{2}(c_\mu - 1)(c_\mu - 2)$$

37. Pruebe cada una de las siguientes propiedades de los valores absolutos:

a) $|x| = 0$ si, y solo si, $x = 0$.
b) $|-x| = |x|$.
c) $|x - y| = |y - x|$.
d) $|x|^2 = x^2$.
e) $|x| = \sqrt{x^2}$.
f) $|xy| = |x|\,|y|$.
g) $|x/y| = |x|/|y|$ si $y \neq 0$.
h) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
i) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
j) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

38. Cada desigualdad (a_i) es equivalente a exactamente una desigualdad (b_j). Por ejemplo, $|x| < 3$ si, y solo si, $-3 < x < 3$, y, por tanto, (a_1) es equivalente a (b_2). Determine todos los pares equivalentes:

(a_1) $\lvert x\rvert < 3$.	(b_1) $4 < x < 6$.
(a_2) $\lvert x - 1\rvert < 3$.	(b_2) $-3 < x < 3$.
(a_3) $\lvert 3 - 2x\rvert < 1$.	(b_3) $x > 3$ o $x < -1$.
(a_4) $\lvert 1 + 2x\rvert \leq 1$.	(b_4) $x > 2$.
(a_5) $\lvert x - 1\rvert > 2$.	(b_5) $-2 < x < 4$.
(a_6) $\lvert x + 2\rvert \geq 5$.	(b_6) $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.
(a_7) $\lvert 5 - x^{-1}\rvert < 1$.	(b_7) $1 < x < 2$.
(a_8) $\lvert x - 5\rvert < \lvert x + 1\rvert$.	(b_8) $x \leq -7$ o $x \geq 3$.
(a_9) $\lvert x^2 - 2\rvert \leq 1$.	(b_9) $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$.
(a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$.	(b_{10}) $-1 \leq x \leq 0$.

39. Determine en cada caso la verdad o falsedad, dando razón de su decisión:

a) $x < 5$ implica $|x| < 5$.
b) $|x - 5| < 2$ implica $3 < x < 7$.
c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -2/3$.
d) No hay un x real para el cual $|x - 1| = |x - 2|$.
e) Para cada $x > 0$ hay un $y > 0$, tal que $|2x + y| = 5$.

40. Demuestre que el signo de igualdad es válido en la desigualdad Cauchy-Schwarz si, y solo si, hay un número real x, tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

ALGEBRA DE LOS VALORES ABSOLUTOS

1. $|ab| = |a|\,|b|$.
2. $|a/b| = |a|/|b|$.
3. $|-a| = |a|$.
4. $|a - b| = |b - a|$.

5. $|a + b| = |a| + |b|$ si $ab \geq 0$.

6. $|a - b| = |a - c| + |c - b|$ si $a \leq c \leq b \Rightarrow c - a \geq 0, b - c \geq 0$ o $b \leq c \leq a$.

7. $|a^2| = a^2$.

8. $\sqrt{a^2} = |a|$.

9. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

10. $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.

11. $|a| \leq |a - c| + |c|$.

12. $|a \mp b| \geq |a| - |b|$.

13. $|a \mp b| \geq ||a| - |b||$.

14. $|b - a| < r|a| \Rightarrow |b| > (1 - r)|a|,\ 0 < r < 1$.

DEMOSTRACIONES

1.

	a	b	ab	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a\|\|b\|$	$\|ab\|$
Caso 1	≥ 0	≥ 0	≥ 0	a	b	ab	ab
Caso 2	≥ 0	≤ 0	≤ 0	a	$-b$	$-ab$	$-ab$
Caso 3	≤ 0	≤ 0	≥ 0	$-a$	$-b$	ab	ab
Caso 4	≤ 0	≥ 0	≤ 0	$-a$	b	$-ab$	$-ab$

3.

a	$-a$	$\|a\|$	$\|-a\|$
≥ 0	≤ 0	a	$-(-a) = a$
≤ 0	≥ 0	$-a$	$-a$

5. Fácil, porque $ab \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ y $b \geq 0$ o $a \leq 0$ y $b \leq 0$.

6. Se demuestra a partir de 5 haciendo $|a - b| = |a - b + c - c|$. Como $c - a \geq 0$ y $b - c \geq 0$, $|a - b + c - c| = |a - c| + |c - b|$.

7.

a	a^2	$\|a^2\| = \|a\|\ \|a\|$
≥ 0	≥ 0	$a \cdot a = a^2$
≤ 0	≥ 0	$(-a) \cdot (-a) = a^2$

8. Mostrando que 8 se sigue de $|a|^2 = a^2$ y $|a| \geq 0$,

$$\sqrt{a^2} = |a| \Rightarrow a^2 = |a|^2$$

9. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

a	b	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a+b\|$	$\|a\|+\|b\|$
≥ 0	≥ 0	a	b	$a+b$	$a+b$
≥ 0	≤ 0	a	$-b$	$-(a+b)$ $a+b$	$a-b$
≤ 0	≥ 0	$-a$	b	$-(a+b)$ $a+b$	$-a+b$
≤ 0	≤ 0	$-a$	$-b$	$-(a+b)$	$-(a+b)$

$a \leq 0, b \geq 0$

$a + b > 0 \qquad |-3+5| = 2 \qquad -(-3)+5 = 8$

$a + b < 0 \qquad |-3+2| = 1 \qquad -(-3)+2 = 5$

10. $a - b = a - b + c - c = (a - c) + (c - b) \Rightarrow |a - b| = |(a - c) + (c - b)| \leq$
$\leq |a - c| + |c - b|$.

11. $a = a + c - c \Rightarrow |a| = |a - c + c| \leq |a - c| + |c|$.

12. Tomamos $|a| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$. Como es válida para cualquier a y b, es válida en particular para $-b$.

$$\Rightarrow |a| - |-b| \leq |a - (-b)| = |a + b|$$
$$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$$

Las otras dos demostraciones se dejan como ejercicio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

41. Pruebe que para $c > 0$, $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$.

Demostración. Caso 1. $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow |a| < c \Rightarrow -a < c \Rightarrow -c < a$.

Pero $a \leq 0$ y $c > 0 \Rightarrow a < c$: $a \leq 0$ si $|a| < c \Rightarrow -c < a < c$

Caso 2. $a > 0$ y $c > 0$ y $|a| < c \Rightarrow a < c \Rightarrow -c < a < c$.

En cualquier caso, $a < c$ y $-c < a \Leftrightarrow -a < c \Rightarrow |a| < c$.

42. Pruebe $|a \mp b| \geq ||a| - |b||$ usando el ejercicio anterior.

Demostración. Como $|a| - |b| \leq |a \mp b| \Rightarrow -|a \mp b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$:

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$ y $|b| - |a| \leq |b - a|$.
$\Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \Rightarrow$ (por el ejercicio anterior) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

También $|a| - |b| \leq |a + b|$ y $|b| - |a| \leq |a + b|$.

$$\Rightarrow -|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$$

43. Demuestre la desigualdad triangular usando el Ejercicio 41.

$$-|a| \leq a \leq |a|;\ -|b| \leq b \leq |b| \Rightarrow \text{(sumando)}$$
$$-(|a| + |b|) \leq (a + b) \leq |a| + |b|$$

44. Muestre que $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.

45. Pruebe que $|a \pm b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$.

46. $|b - a| < r|a| \Rightarrow |b| > (1 - r)|a|$, $0 < r < 1$.

Demostración. $r|a| > |b - a| > |a| - |b| \Rightarrow |b| > |a|(1 - r)$.

PROXIMIDAD

Se va a estudiar la proximidad de parejas de números reales y después la proximidad de parejas de funciones, parejas de conjuntos, parejas de curvas, etc.

Considere la siguiente situación: ¿Cuál es la proximidad que existe entre 1, 4 y $\sqrt{2}$?

Se puede contestar: *a*) una décima; *b*) 0,05; *c*) 0,015; *d*) 0,0145. ¿Cuál es la respuesta correcta? Todas son correctas, todo depende de la precisión que se quiera dar.

Dados dos números, digamos $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, en el estudio de límites es importante saber cómo se resuelven los siguientes problemas:

1. ¿Hasta qué extensión la función prescrita (suma de funciones, o resta de funciones, o producto de funciones, o cociente de funciones) propaga el error inducido por la aproximación?

Por ejemplo, si 1,4 y 1,7 son aproximaciones de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, ¿con qué aproximación se obtienen 1,4 + 1,7 de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ o (1,4) (1,7) de $\sqrt{2}\sqrt{3}$, etc?

2. Dada una función, ¿cómo deben ser las aproximaciones de los números dados para que los valores funcionales de las aproximaciones estén dentro de determinada aproximación, dada de antemano, de los valores funcionales de los números dados?

Por ejemplo, si x y y son dos aproximaciones de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ (por ejemplo, 1,4; 1,71, ...), ¿a qué proximidad debe estar x de $\sqrt{2}$ y y de $\sqrt{3}$ para que $x + y$ esté, digamos, a 0,01 de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

Las Figuras 1-2 y 1-3 ilustran geométricamente lo que plantean estos dos problemas.

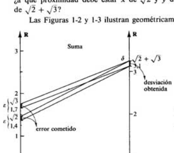


Figura 1-2

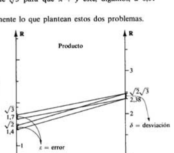


Figura 1-3

En el estudio del concepto de límite ε es sinónimo de error y δ sinónimo de desviación.

En el estudio fundamental del concepto de límite va implicado un proceso clave, y es: dado un ε, hallar el δ correspondiente.

Los problemas que se resuelven a continuación dan la respuesta analítica a los dos problemas que se han planteado.

PROBLEMAS RESUELTOS

Proximidad de sumas

Problema 1-31 Según la desigualdad triangular muestre que

$$|(x + y) - (a + b)| \le |x - a| + |y - b|$$

Solución. $|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \le |x - a| + |y - b|$.

Problema 1-32 Discuta la proximidad de $(1{,}4 + 1{,}7)$ a $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ si $|1{,}4 - \sqrt{2}| < 0{,}05$ y $|1{,}7 - \sqrt{3}| < 0{,}05$ son las desviaciones.

Solución. $|(1{,}4 + 1{,}7) - (\sqrt{2} + \sqrt{3})| = |(1{,}4 - \sqrt{2}) + (1{,}7 - \sqrt{3})| \le |1{,}4 - \sqrt{2}| + |1{,}7 - \sqrt{3}| < 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$.

Problema 1-33 Utilice el Problema 1-31 para determinar una desviación común δ, para $|x - \sqrt{2}|$ y $|y - \sqrt{3}|$ tal que $|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt{3})| < 0{,}0005$.

Solución. $|(x + y) - (\sqrt{2} + \sqrt{3})| = |(x - \sqrt{2}) + (y - \sqrt{3})| \le |x - \sqrt{2}| + |y - \sqrt{3}| < 0{,}0005$.

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - \sqrt{2}| < \dfrac{0{,}0005}{2} = 0{,}00025 = \delta \\ y \\ |y - \sqrt{3}| < \dfrac{0{,}0005}{2} = 0{,}00025 = \delta \end{cases}$$

Problema 1-34 Si $|1{,}4 - \sqrt{2}| < 0{,}05$ determine un error para $|5(1{,}4) - 5\sqrt{2}|$.

Solución. $|5(1{,}4) - 5\sqrt{2}| = |5(1{,}4 - \sqrt{2})| = |5|\,|1{,}4 - \sqrt{2}| = 5\,|1{,}4 - \sqrt{2}| < \varepsilon$. $\varepsilon = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25$.

Proximidad de productos

Problema 1-35 Demuestre las siguientes desigualdades:

a) $|xy - ab| \le |x|\,|y - b| + |b|\,|x - a|$.
b) $|xy - ab| \le (|x - a| + |a|) \cdot |y - b| + |b|\,|x - a|$.
c) $|xy - ab| \le (1 + |a|)\,|y - b| + |b|\,|x - a|$ si $|x - a| < 1$.

Solución. *a)* $xy - ab = xy - xb + xb - ab = x(y - b) + b(x - a) \Rightarrow |xy - ab| = |x(y - b) + b(x - a)| \le |x(y - b)| + |b(x - a)| = |x|\,|y - b| + |b|\,|x - a|$.

b) Para demostrar esta desigualdad remplazamos a $|x|$ por $|x - a| + |a|$ en *a)*, porque $x = (x - a) + a$ da $|x| \le |x - a| + |a|$.

c) Si suponemos que $|x - a| < 1$ en *b)* se obtiene $|xy - ab| \le (1 + |a|)\,|y - b| + |b|\,|x - a|$.

Problema 1-36 Discuta la proximidad de $(1{,}4)(1{,}7)$ a $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$ si $|1{,}4 - \sqrt{2}| < 0{,}05$ y $|1{,}7 - \sqrt{3}| < 0{,}05 \Rightarrow |(1{,}4)(1{,}7) - \sqrt{2}\,\sqrt{3}| < \varepsilon$.

Solución. $|\sqrt{2}\sqrt{3} - (1{,}4)(1{,}7)| = |\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1{,}7) + 1{,}7(\sqrt{2} - 1{,}4)| \le (|\sqrt{2} - 1{,}4| + |1{,}4|)\,|\sqrt{3} - 1{,}7| + |1{,}7|\,|\sqrt{2} - 1{,}4| < (0{,}05 + 1{,}4)\,0{,}05 + 1{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}1575$.

Problema 1-37 · Determine δ_1 y δ_2, tales que

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ y } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}01$$

Solución. Por la desigualdad *c*) del Problema 1-35 se tiene

$$|xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| \leq (1 + \sqrt{2})\,|y - \sqrt{3}| + \sqrt{3}\,|x - \sqrt{2}| \text{ si } |x - \sqrt{2}| < 1 \leq$$
$$\leq 3\,|y - \sqrt{3}| + 2\,|x - \sqrt{2}| \text{ si } |x - \sqrt{2}| < 1$$

porque $\sqrt{2} < 2$ y $\sqrt{3} < 2$.

$$\text{Como } 3|y - \sqrt{3}| + 2|x - \sqrt{2}| < 0{,}01 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3|y - \sqrt{3}| < \frac{0{,}01}{2} \Rightarrow |y - \sqrt{3}| < \frac{0{,}01}{6} \\ \text{y} \\ 2|x - \sqrt{2}| < \frac{0{,}01}{2} \Rightarrow |x - \sqrt{2}| < \frac{0{,}01}{4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}01 \text{ si } |x - \sqrt{2}| < 1$$

Observe que $|x - \sqrt{2}| < \frac{0{,}01}{4} \Rightarrow |x - \sqrt{2}| < 1$, es decir, se cumple la condición «si $|x - \sqrt{2}| < 1$».

Problema 1-38 Determine δ_1 y δ_2, tales que

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ y } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon, \varepsilon \text{ dado}$$

Solución. Por el problema anterior se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} |x - \sqrt{2}| < \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{y} \\ \left| y - \sqrt{3} \right| < \frac{\varepsilon}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon \text{ si } |x - \sqrt{2}| < 1$$

Ahora $|x - \sqrt{2}| < \frac{\varepsilon}{4}$ no cumple la condición $|x - \sqrt{2}| < 1$ si, por ejemplo, $\varepsilon = 5$.

Sin embargo, $|x - \sqrt{2}| < \text{mínimo}\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right) \Rightarrow |x - \sqrt{2}| < 1$ y $|x - \sqrt{2}| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} |x - \sqrt{2}| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right) \\ \text{y} \\ |y - \sqrt{3}| < \frac{\varepsilon}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon.$$

Problema 1-39 Resuelva para δ_1 y δ_2 si ε es dado:

$$|x^2 - 4| < \delta_1 \text{ y } |x^3 - 8| < \delta_2 \Rightarrow |x^5 - 32| < \varepsilon$$

Solución. $|x^2 \cdot x^3 - 4 \cdot 8| \leq 5|x^3 - 8| + 8|x^2 - 4|$ si $|x^2 - 4| < 1$ con x^2, x^3, 4 y 8 por x, y, a y b en la desigualdad *c*) del Problema 1-35.

Para que se cumpla la desigualdad $|x^2 - 4| < 1$ se debe tomar a $|x^2 - 4| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{16}\right)$.

Por tanto, $\delta_1 = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{16}\right)$ $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{10}$.

Proximidad de sumas y productos de funciones trigonométricas

Problema 1-40 Discuta la proximidad de sen $x \cdot \cos y$ a sen $a \cdot \cos b$ y la de sen x a sen a y cos y a cos a.

Solución. $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| \leq |x - a|$, según la Figura 1-4.

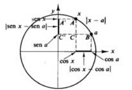


Figura 1-4

Análogo para $|\cos y - \cos b| \leq |y - b|$.

Ahora: $|\text{sen}\, x \cos y - \text{sen}\, a \cos b| = |\text{sen}\, x(\cos y - \cos b) + \cos b(\text{sen}\, x - \text{sen}\, a)| \leq$

$\leq |\text{sen}\, x|\,|\cos y - \cos b| + |\cos b|\,|\text{sen}\, x - \text{sen}\, a| \leq$

$\leq 1\,|\cos y - \cos b| + 1\,|\text{sen}\, x - \text{sen}\, a|$

$\leq 1\,|y - b| + 1\,|x - a|$.

Problema 1-41 Discuta la proximidad de A sen $(Bx + C)$ a A sen $(Ba + C)$ con A, B y C reales dados.

Solución. $|A\,\text{sen}\,(Bx + C) - A\,\text{sen}\,(Ba + C)| = |A|\,|\text{sen}\,(Bx + C) - \text{sen}\,(Ba + C)| \leq$

$\leq |A|\,|(Bx + C) - (Ba + C)| = |A|\,|B|\,|x - a|$

Problema 1-42 Discuta la proximidad de $\text{sen}^2\, 2x$ a $\text{sen}^2\, 2a$, a fijo.

Solución. $|\text{sen}^2\, 2x - \text{sen}^2\, 2a| = |(\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 2a)(\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, 2a)| =$

$= |\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 2a|\,|\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, 2a| \leq$

$\leq (|\text{sen}\, 2x| + |\text{sen}\, 2a|)\,|\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, 2a| \leq$

$\leq 2\,|2x - 2a| = 4\,|x - a|$

Proximidad de inversos

Problema 1-43 Muestre que si $x,\ a \in \mathbf{R} -]-1, 1[\ \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| \leq |x - a|$.

Solución. $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{a - x}{xa}\right| = \dfrac{|x - a|}{|xa|}$.

Como $x, a \in \mathbf{R} -]-1, 1[\ \Rightarrow |x| \geq 1$ y $|a| \geq 1 \quad \therefore\ |xa| \geq 1$, por tanto, $\dfrac{1}{|xa|} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|x - a|}{|xa|} \leq |x - a|$$

Problema 1-44 Discuta la proximidad de $\dfrac{1}{x}$ a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ con $x \geq 1$.

Solución. Como $\sqrt{2} > 1$, $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq |x - \sqrt{2}|$ si $x \geq 1$.

Los errores sirven como desviaciones, y viceversa.

Por ejemplo, $\left|\dfrac{1}{1{,}4} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 0{,}05$ porque $|1{,}4 - \sqrt{2}| < 0{,}05$.

Análogamente, $|1{,}41 - \sqrt{2}| < 0{,}005 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{1{,}41} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 0{,}005$.

El siguiente problema ayuda a manejar los inversos de los números menores que 1.

Problema 1-45 Discuta la proximidad $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{x}$.

Solución.
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| \le \frac{1}{|x|\,|a|}|x-a| \tag{1}$$

El objetivo es mostrar un número M tal que $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| \le M|x-a|$.

Se busca $m \ge 0$ tal que $|x| \ge m \Rightarrow \frac{1}{|x|\,|a|} \le \frac{1}{m|a|}$.

Por (1) se elige $M = \frac{1}{m|a|}$. Si x se restringe a $\left(\frac{|a|}{2}, a\right) \Rightarrow |x-a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |x| > \frac{|a|}{2}$, que es un caso particular de $|b-a| < r|a| \Rightarrow |b| > (1-r)|a|$, $0 < r < 1$:

$$|x-a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|\,|a|}|x-a| < \frac{2}{|a|^2}|x-a| \tag{2}$$

(2) satisface el objetivo original porque $M = \frac{2}{|a|^2}$ sirve.

De (1) y (2) y la transitividad de $<$ se obtiene

$$|x-a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \frac{2}{|a|^2}|x-a|$$

De $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ y $|x-a| < \frac{|a|^2\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \varepsilon$. Por tanto, si

$$\delta = \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |x-a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| < \varepsilon \tag{3}$$

Para ilustrar (3) se tienen los siguientes casos especiales:

$$\left|x-\frac{1}{3}\right| < \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{18}\right) \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$|x-(-0{,}5)| < \min(0{,}25,\ 0{,}125\,\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-(-2)\right| < \varepsilon$$

Problema 1-46 Discuta la proximidad de $\frac{x}{y}$ a $\frac{a}{b}$, a y b fijos.

Solución. $\frac{x}{y}-\frac{a}{b} = \frac{bx-ay}{yb} = \frac{b(x-a)+a(b-y)}{yb} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b(x-a)+a(b-y)}{yb}\right| \le$

$$\le \frac{|b|\,|x-a|+|a|\,|y-b|}{|y|\,|b|} \le \frac{|b|\,|x-a|+|a|\,|y-b|}{|b|^2/2} \quad \text{si } |y-b| \le \frac{|b|}{2}$$

$$= \frac{2}{|b|}|x-a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y-b|$$

$$|y-b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right| \le \frac{2}{|b|}|x-a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y-b|,$$

de donde

$$(*)\quad \left.\begin{array}{l} |y-b| < \frac{|b|}{2} \\ |y-b| < \frac{|b|^2\varepsilon}{4|a|} \\ |x-a| < \frac{|b|\varepsilon}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}-\frac{a}{b}\right| < \varepsilon$$

Si $\delta_1 = \frac{|b|\varepsilon}{4}$ y $\delta_2 = \min\left(\frac{|b|}{2}, \frac{|b|^2\varepsilon}{4|a|}\right)$ y por la relación (*) se tiene

$$|x - a| < \delta_1 \text{ y } |y - b| < \delta_2 \Rightarrow \left|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

47. Verifique que $|(x + y + z) - (a + b + c)| \leq |x - a| + |y - b| + |z - c|$.

48. Discuta la proximidad de $3{,}14 + 1{,}73$ a $\pi + \sqrt{3}$.

49. Verifique que $\left|\sum_1^n c_i x_i - \sum_1^n c_i a_i\right| \leq \sum_1^n |c_i|\,|x_i - a_i|$.

50. Halle una desviación δ que verifique:

a) $|x - \sqrt{2}| < \delta \Rightarrow |7x - 7\sqrt{2}| < 0{,}03$.

b) $|x - \sqrt{3}| < \delta \Rightarrow |\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}01$.

51. Resuelva para δ suponiendo que ε es dado:

a) $|x - a| < \delta$ y $|y - b| < \delta \Rightarrow |(3x + 4y) - (3a + 4b)| < \varepsilon$.

b) $|x - a| < \delta$ y $|y - b| < \delta$ y $|z - c| < \delta \Rightarrow |(2x + 3y + 4z) - (2a + 3b + 4c)| < \varepsilon$.

52. Halle δ_1 y δ_2 para que se verifique

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ y } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < 0{,}005$$

53. Halle $M > 0$ tal que $|x - 5| < 1 \Rightarrow |3xy - 3(5)(7)| \leq M(|x - 5| + |y - 7|)$.

54. Para ε dado halle δ para que

$$|x - 5| < \delta \text{ y } |y - 7| < \delta \Rightarrow |3xy - 3(5)(7)| < \varepsilon$$

55. Resuelva para δ_1 y δ_2 si ε es dado:

$$|x^2 - 1| < \delta_1 \text{ y } |x^3 - 1| < \delta_2 \Rightarrow |x^5 - 1| < \varepsilon$$

56. Verifique: $|(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) - (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)| \leq |x - a| + |y - b|$.

57. Verifique: $|\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b| \leq |x - a| + |y - b|$.

58. Verifique: $|\operatorname{sen}^2 3x - \operatorname{sen}^2 3a| \leq 6|x - a|$.

59. Verifique: $|\operatorname{sen}\sqrt{2} - \operatorname{sen} 1{,}41| < 0{,}005$.

60. Indique la proximidad de los siguientes pares de números:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{1{,}4}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\frac{1{,}73}{1{,}41}$.

c) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$, $\frac{1}{\operatorname{sen} a}$, si $a, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, si $a, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

CAPITULO 2

Números naturales

Existen determinados subconjuntos de los reales que se distinguen por algunas propiedades especiales. Uno de estos subconjuntos son los números naturales $\mathbf{N}\{0, 1, 2, \ldots\}$. El sistema de los números reales se desarrolló en nuestra civilización a partir del conjunto de los números naturales N. Es posible empezar con este conjunto y, a partir de él, construir los enteros, después los racionales, los reales y, finalmente, los complejos. Este proceso es muy instructivo, pero muy largo y lleno de detalles. Por esta razón se estudió únicamente el conjunto de los números reales. De la siguiente definición resulta lo que es un número natural.

Definición. Un conjunto M de números reales es un conjunto inductivo si posee las siguientes propiedades:

1. $0 \in M$.
2. $\forall x, x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

Ejemplo 2-1. El conjunto **R** de los números reales es inductivo porque 0 es un número real y $x + 1$ es un real si x lo es.

Ejemplo 2-2. Los siguientes conjuntos también son inductivos:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}; \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$$

Los siguientes subconjuntos de números reales no son inductivos:

1. El conjunto $\{x\colon 0 \le x \le 1, x \in \mathbf{R}\}$ no es inductivo, porque 1 está en el conjunto, pero $2 = 1 + 1$ no.

2. El conjunto $\{x\colon x > 0, x \in \mathbf{R}\}$ satisface la segunda condición, pero no la primera, porque 0 no está en el conjunto.

3. Los siguientes subconjuntos no son inductivos:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}; \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, \ldots\right\}; \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Definición. Un número real es un número natural si pertenece a todo conjunto inductivo.

$$\mathbf{N} = \{x\colon x \text{ está contenido en todo conjunto inductivo}\}$$

Como los elementos de N pertenecen a todo conjunto inductivo, decimos que N constituye la base de un modelo de razonamiento que los matemáticos llaman demostración por inducción o recurrencia.

Teorema. Todo conjunto inductivo de números reales contiene los números 0, 1, 2, 3, ...

En efecto, $0 \in M$ por definición de conjunto inductivo
$0 + 1 \in M$ por definición de conjunto inductivo
$1 \in M$ por el axioma $a + 0 = a$
$1 + 1 \in M$ por definición de conjunto inductivo
$2 \in M$ por definición $2 = 1 + 1$
$2 + 1 \in M$ por definición de conjunto inductivo
$3 \in M$ por definición $3 = 2 + 1$
....

Como los números naturales son reales, gozan de las propiedades de los reales, incluyendo las propiedades de cuerpo y de orden.

El siguiente teorema da un criterio para decidir si una determinada propiedad se verifica para todos los números naturales.

Sea $P(x)$ la proposición abierta, x verifica la propiedad P. Entonces,

Teorema. (Principio de inducción matemática.) $P(x)$ es verdadera para todos los números naturales x si

1. $P(0)$ es verdadera.
2. Si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k + 1)$ es verdadera.

El principio de inducción se puede formular de una manera equivalente sin hablar de «propiedades» de un número, término un poco vago.

Se puede enunciar en forma más precisa, diciendo que si A es un conjunto de números naturales y

1. $1 \in A$;
2. $k + 1 \in A$ si $k \in A$,

entonces A es el conjunto de los números naturales. Esta formulación simplemente remplaza a la anterior si se considera a A como el conjunto de los números naturales que satisfacen la propiedad $P(x)$.

Existe otra formulación del principio de inducción matemática que parece diferente. Si A es un conjunto de números naturales $\neq \phi$, entonces A posee un elemento mínimo. Esta proposición «intuitivamente obvia» se conoce con el nombre de «principio de buena ordenación» y se demuestra a partir del principio de inducción de la siguiente manera: Suponga que A no tiene elemento mínimo. Sea B el conjunto de los naturales n tales que $1, 2, \dots, n$ no pertenecen a A. $1 \in B$ (porque si $1 \in A$, entonces A tiene un mínimo, 1). Además si $1, 2, \dots, k$ no están en A, $k + 1 \notin A$ (porque de otra manera $k + 1$ sería el elemento mínimo de A); por tanto, $1, 2, \dots, k + 1$ no están todos en A. Esto muestra que si $k \in B \Rightarrow k + 1 \in B$. De esto se sigue que n está en B, es decir, los números $1, 2, \dots, n$ no están en A para ningún número natural n. Por tanto, $A = \phi$, lo cual completa la demostración.

También es posible demostrar el principio de inducción a partir del principio de buena ordenación.

En efecto, suponga que A contiene a 1 y que A contiene a $n + 1$ si contiene a n. Si A no contiene todos los números naturales, entonces el conjunto B de números naturales que no están en A es $\neq \phi$. Por tanto, B contiene un elemento mínimo n_0. Ahora $n_0 \neq 1$ porque A contiene a 1; por tanto, se puede escribir $n_0 = (n_0 - 1) + 1$, con $n_0 - 1$ un número natural, $n_0 - 1 \notin B$, por tanto, $n_0 - 1 \notin A$. Por hipótesis, n_0 debe estar en A; por consiguiente, $n_0 \notin B$, lo cual es una contradicción.

Existe otra forma de inducción. Algunas veces sucede que para demostrar $P(k + 1)$ se debe suponer no solamente $P(k)$, sino también que $P(1)$ es verdadera para todo $1 \leq k$. Este caso se llama «principio de inducción completa».

Aunque el principio de «inducción completa» parezca más fuerte que el principio de inducción, la realidad es que es una consecuencia de éste.

En efecto, Si A contiene a 1 y A contiene a $n + 1$, si contiene a $1, 2, \ldots, n$. Sea B el conjunto de todos los k tales que $1, 2, \ldots, k \in A$. Suponga que $1 \in B$.

Si $k \in B \Rightarrow 1, 2, \ldots, k \in A$, por tanto, $k + 1 \in A$, entonces $1, 2, \ldots, k + 1 \in A$; por consiguiente, $k + 1 \in B$. Por inducción, $B = \mathbf{N}$; por tanto, $A = \mathbf{N}$.

El principio de inducción completa se enuncia de la siguiente manera: Si A es un conjunto de números naturales y

1. $1 \in A$;
2. $k + 1 \in A$ si $1, 2, \ldots, k$ están en A,

entonces A es el conjunto de todos los números naturales.

Nota. Si en el teorema de inducción se cambian las hipótesis se obtienen los resultados siguientes, que son otras formas de presentar el principio de inducción:

1. Si a es un entero natural diferente de 0, todo subconjunto A de $\mathbf{N}$ tal que

$$a \in A \text{ y } [(x \in A) \Rightarrow x + 1 \in A]$$

contiene el intervalo $[a, \rightarrow[$ (recurrencia a partir de a).

2. Si b es un número natural diferente de 0, todo subconjunto de $\mathbf{N}$ tal que

$$0 \in A \text{ y } [(x < b \text{ y } b \in A) \Rightarrow x + 1 \in A]$$

contiene al intervalo $[0, b]$ (recurrencia hasta b o inducción completa).

3. Si a y b son dos enteros naturales tales que $0 < a < b$, toda parte A de $\mathbf{N}$ tal que

$$a \in A \text{ y } [(x < b \text{ y } x \in A) \Rightarrow x + 1 \in A]$$

contiene el intervalo $[a, b]$ (recurrencia sobre un intervalo).

Nota. El principio de inducción matemática se llama inducción transfinita cuando se aplica a conjuntos bien ordenados más complicados que el conjunto $\mathbf{N}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 2-1 Pruebe que si $0 < x < 1$ y n un entero positivo, entonces $0 < x^n < 1$.

Solución. Sea x tal que $0 < x < 1$. Sea S el conjunto de los enteros positivos n tales que $0 < x^n < 1$. Se va a mostrar que el conjunto S es el conjunto de todos los naturales:

1. $1 \in S$ por hipótesis.
2. Si $m \in S$, es decir, si $0 < x^m < 1$, $\Rightarrow 0 < x^{m+1} < 1$. $m + 1 \in S$.

Por el principio de inducción, $S = \mathbf{N}$.

Problema 2-2 Muestre que para todo real ≥ -1 y para cualquier entero positivo n, $(1 + p)^n \geq 1 + np$.

Solución. Sea S el conjunto de los enteros positivos n para los cuales $(1 + p)^n \geq 1 + np$:

1. $1 \in S$ porque $(1 + p)^1 = 1 + p = 1 + 1 \cdot p$.
2. Si $m \in S$, es decir, $(1 + p)^m \geq 1 + mp$, entonces

$$(1 + p)^{m+1} = (1 + p)(1 + p)^m \geq (1 + p)(1 + mp) = 1 + p + mp + mp^2 \geq 1 + (m + 1)p$$

Así, $m \in S \Rightarrow m + 1 \in S$. Aplicando el principio de inducción se obtiene el resultado.

Problema 2-3 Muèstre que si n es cualquier entero positivo, $\frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ es un entero.

Solución. Sea S el conjunto de los enteros positivos n tales que $\frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ es un entero.

1. $1 \in S$, porque $\frac{1}{3}(1 + 2) = 1$.
2. Si $m \in S$, es decir, si $\frac{1}{3}(m^3 + 2m)$ es un entero, entonces

$$\frac{1}{3}[(m + 1)^3 + 2(m + 1)] = \frac{1}{3}(m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2) = \frac{1}{3}(m^3 + 2m) + m^2 + m + 1$$

es un entero.

Así, $m \in S \Rightarrow m + 1 \in S$. $\therefore$ $S = \mathbf{N}$, por el principio de inducción.

Problema 2-4 Muestre que $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

Solución. Sea S el conjunto de los enteros positivos n para los cuales la fórmula es verdadera.

1. $1 \in S$, porque $1 = 1 \cdot 2/2$.
2. Si $m \in S$, es decir, si $S_m = 1 + 2 + \ldots + m = m(m + 1)/2$, entonces

$$S_{m+1} = 1 + 2 + \ldots + m + (m + 1) = S_m + (m + 1) = m(m + 1)/2 + (m + 1) = (m + 1)(m + 2)/2$$

Así, $m \in S \Rightarrow m + 1 \in S$, por el principio de inducción, $S = \mathbf{N}$.

Problema 2-5 Muestre que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$.

Solución. Sea S el conjunto de los enteros positivos n para los cuales la fórmula es verdadera.

1. $1 \in S$ porque $\sum_{k=1}^{1} k = 1^2 = \frac{1}{6}(2)(3) = 1$.
2. Si $m \in S$, es decir, si $\sum_{k=1}^{m} k^2 = m(m + 1)(2m + 1)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m + 1)^2 = \frac{m}{6}(m + 1)(2m + 1) + (m + 1)^2 = \frac{m + 1}{6}[m(2m + 1) + 6(m + 1)]$$

$$= \frac{m + 1}{6}[2m^2 + 7m + 6) = \frac{m + 1}{6}(m + 2)(2m + 3)$$

Así, $m \in S \Rightarrow m + 1 \in S$. Por el principio de inducción, $S = \mathbf{N}$.

Problema 2-6 Muestre que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de $n + 2$ lados es $180°\ n$.

Solución. Sea P_n la proposición dada.

1. Si $n = 1$, el polígono es un triángulo y se sabe, por geometría elemental, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Entonces P_1 es verdadera.
2. Suponga que P_k es verdadera para un natural fijo k, es decir, un polígono de $k + 2$ lados; la suma de sus ángulos interiores es $(180°\ k)$. Cualquier polígono convexo de $k + 3$ lados se puede dividir en un triángulo y un polígono convexo de $k + 2$ lados, uniendo el primer y tercer vértice de cada tres vértices consecutivos del polígono dado. Por la hipótesis de inducción, la suma de los ángulos interiores del polígono con $k + 2$ lados es $180°\ k$ y la del triángulo 180°. La suma de las dos es $[180°\ (k + 1)]°$, que forma un polígono de $k + 3$ lados. Esto quiere decir que P_{k+1} es verdadera. Por el principio de inducción, P_n es verdadera para todo natural n.

Problema 2-7 Al dibujar una recta se divide el plano en dos partes. Dos rectas dividen el plano en tres partes (si las rectas son paralelas) o cuatro partes (si las rectas no son paralelas). Tres rectas dividen el plano en un máximo de siete partes (si dos rectas no son paralelas y tres no se cortan en un punto). Esta construcción sugiere el problema de hallar el máximo número de partes en que n rectas dividen al plano. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $f(n)$ este número.

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	2	4	7	11	16

La tabla muestra que $f(2) = f(1) + 2 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2$; $f(3) = f(2) + 3 = 1 + 1 + 2 + 3$; $f(4) = f(3) + 4 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4$; $f(5) = f(4) + 5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Esta construcción sugiere que $f(n) = (n^2 + n + 2)/2$. Demuestre esta fórmula por inducción.

Solución. Sea P_n la proposición dada.

1. P_1 es verdadera porque $f(1) = 2$.
2. Suponga que $f(k) = (k^2 + k + 2)/2$; es decir, que P_k es verdadera.

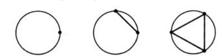
Sea $L = \{1_1, 1_2, \ldots, 1_k, 1\}$ el conjunto de $k + 1$ rectas que dividen el plano en un número máximo de $f(k + 1)$ partes. Entonces la recta 1 debe cortar las rectas $1_1, 1_2, \ldots, 1_k$ en k puntos diferentes; es decir, 1 subdivide exactamente $k + 1$ de las $f(k)$ partes en que el conjunto $L - \{1\}$ de rectas divide el plano. Así, se tiene que

$$f(k + 1) = f(k) + (k + 1)$$

Pero $f(k) + f(k + 1) = (k^2 + k + 2)/2 + (k + 1) = k^2 + (3k + 4)/2 = [(k + 1)^2 + (k + 1) + 2]/2$.

Entonces $f(k + 1) = f(k) + f(k + 1)$, es decir, P_{k+1} es verdadera.

Problema 2-8 Considere n puntos sobre un círculo. Uniendo los puntos adyacentes por segmentos se obtiene un polígono de n lados. Se desea saber el número $g(n)$ de diagonales del polígono. Al hacer los dibujos correspondientes se obtiene:



$g(1) = 0$ $g(2) = 0$ $g(3) = 0$

n	1	2	3	4	5	6	7
$g(n)$	0	0	0	2	5	9	14

Teniendo en cuenta la fórmula $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(4) &= 2 &&= S(2) - 1 \\ g(5) &= g(4) + 3 = 2 + 3 &&= S(3) - 1 \\ g(6) &= g(5) + 4 = 2 + 3 + 4 &&= S(4) - 1 \\ g(7) &= g(6) + 5 = 2 + 3 + 4 + 5 &&= S(5) - 1 \end{aligned}$$

Basados en estos resultados se puede predecir que para $n \geq 4$:

$$g(n) = S(n - 2) - 1 = n(n - 3)/2$$

Demuestre esta fórmula por inducción.

Solución. Sea P_n la proposición dada.

1. P_4 es verdadera porque $g(4) = 2$.

2. Suponga que P_k es verdadera para todo natural k fijo, es decir, $g(k) = k(k-3)/2$, $k \geq 4$. Sea P' un punto del polígono dado de k lados entre los vértices adyacentes A y B. Se obtiene un polígono de $k+1$ vértices. Toda diagonal del polígono de k lados es una diagonal del polígono de $k+1$ lados. Cada segmento que une P' a un vértice del polígono de k lados, distintos de A o B, es una diagonal del polígono de $k+1$ lados. Entonces

$$g(k+1) = g(k) + (k-1) = k(k-3)/2 + (k-1) = (k^2 - k - 2)/2 = (k+1)(k-2)/2$$

Es decir, P_{k+1} es verdadera.

Problema 2-9 Pruebe que $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$ con $a + b > 0$, $a \neq b$ y n un número natural mayor que 1.

Solución. 1. Para $n = 2$ la desigualdad toma la forma

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \tag{1}$$

Como $a \neq b$, se tiene la desigualdad

$$(a-b)^2 > 0 \tag{2}$$

Sumando $(a+b)^2$ a cada lado de la desigualdad (2) se obtiene la desigualdad (1). Esto demuestra la desigualdad para $n = 2$.

2. Suponga que la desigualdad se verifica para $n = k$, es decir,

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a+b)^k \tag{3}$$

Vamos a demostrar la desigualdad para $n = k + 1$, es decir,

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a+b)^{k+1} \tag{4}$$

Multiplicando ambos lados de (3) por $a + b$ se obtiene

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) > (a+b)^{k+1} \tag{5}$$

Para demostrar la desigualdad (4) es suficiente mostrar que

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \tag{6}$$

o

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k \tag{7}$$

La desigualdad (7) se puede escribir en la forma

$$(a^k - b^k)(a-b) > 0 \tag{8}$$

Suponga que $a > b$. Entonces, de la hipótesis de que $a > 0$, se sigue que $a > |b|$; por tanto, $a^k > b^k$. Así, el lado de la izquierda de (8) es el producto de dos números positivos. Si $a < b$, entonces $a^k < b^k$. En este caso, el término de la izquierda de (8) es el producto de dos números negativos. En cualquier caso se verifica la desigualdad (8).

Esto demuestra que si la desigualdad es válida para $n = k$ se verifica para $n = k + 1$.

Problema 2-10 Pruebe que para cualquier $x > 0$, y para cualquier número natural n, la siguiente desigualdad es verdadera:

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1$$

Solución. 1*a*) Para $n = 1$ la desigualdad toma la forma

$$x + 1/x \geq 2 \tag{1}$$

La desigualdad (1) es consecuencia de que

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

1*b*) Para $n = 2$ la desigualdad toma la forma

$$x^2 + 1 + 1/x^2 \geq 3 \tag{2}$$

Como la desigualdad (1) se verifica para cualquier $x > 0$, también se verifica si x se remplaza por x^2, es decir,

$$x^2 + 1/x^2 \geq 2$$

Sumando 1 a ambos lados de esta última desigualdad se obtiene (2).

2. Suponga que la desigualdad se verifica para $n = k$, es decir,

$$x^k + x^{k-2} + \dots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1 \tag{3}$$

Vamos a mostrar que la desigualdad también se verifica para $n = k + 2$, es decir,

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \dots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3 \tag{4}$$

Remplazando x por x^{k+2} en la desigualdad (1) se obtiene

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2 \tag{5}$$

Sumando término a término las desigualdades (3) y (5) se obtiene la desigualdad (4).

Resumen: En 1*a*) y 1*b*) se demostró que la desigualdad se verifica para $n = 1$ y $n = 2$. En 2 se demostró que la desigualdad se verifica para $n = k + 2$ si se verifica para $n = k$. En otras palabras, los resultados de 1*a*) y 2 permiten afirmar que la desigualdad es válida para todos los valores impares de n. Análogamente, los resultados de 1*b*) y 2 muestran que la desigualdad se verifica para todos los valores pares de n. Entonces la desigualdad es válida para todos los números naturales.

Problema 2-11 Demuestre la siguiente proposición: la media geométrica de un número finito de números positivos no es mayor que su media aritmética, es decir, para cualquier conjunto de números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\sqrt[n]{a_1, a_2, \dots, a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \tag{1}$$

Solución. 1. Para $n = 2$ la desigualdad (1) toma la forma

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \tag{2}$$

Como para todo par de números a_1 y a_2 se verifica la siguiente desigualdad:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

Esto prueba la desigualdad (2).

La desigualdad (2) tiene una interpretación geométrica simple. Dada una recta elija un punto A sobre ella; sobre esta recta dibuje los segmentos AC y CB de longitudes a_1 y a_2, respectivamente. Construya un círculo con diámetro AB. Entonces la longitud del radio del círculo es $(a_1 + a_2)/2$. En el punto C dibuje una perpendicular al segmento AB y sea D el punto en que la perpendicular corta al círculo. La longitud del segmento CD es $\sqrt{a_1 a_2}$.

2*a*) Suponga que la desigualdad (1) se verifica para $n = k$ y demuestre que se verifica para $n = 2k$:

$$\sqrt[2k]{a_1 a_2, \ldots, a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2}, \ldots, a_{2k}}} \le \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2}, \ldots, a_{2k}}}{2} \le$$

$$\le \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{k}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_{2k}}{2k}$$

Como la desigualdad (1) se verifica para $n = 2$, podemos suponer que es válida para $n = 4, 8, 16$, etc., es decir, para cualquier $n = 2^s$, siendo s un natural.

2*b*) Para demostrar que la desigualdad (1) se verifica para todos los números naturales n se va a mostrar que si es válida para $n = k$, entonces es válida para $n = k - 1$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ números positivos arbitrarios, y λ otro número positivo sin determinar. Entonces:

$$\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}\lambda} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \lambda}{k}$$

λ se elige de tal manera que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}, \text{ es decir, sea } \lambda = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

Entonces se obtiene:

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})}{k-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \text{ o } \sqrt[k-1]{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

Sea m un número natural arbitrario. Si $m = 2^s$ para un número natural s, entonces, según 2*a*), la desigualdad (1) se verifica. Si, por otra parte, $m \ne 2^s$, se puede hallar un número natural s tal que $m < 2^s$. Entonces, en virtud de 2*a*) y 2*b*), podemos afirmar que la desigualdad se verifica también para $n = m$.

Problema 2-12 Demuestre por *inducción completa* sobre p que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + n$$

Solución. La proposición es verdadera para $p = 1$.

Suponga que es verdadera para todos los números naturales $\le p$.

El teorema del binomio da $(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (p+1)k^p +$ los términos que contienen potencias menores de k.

Sumando para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ se obtiene

$$\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}, = \sum_{k=1}^{n} k^p + \text{términos de } \sum_{k=1}^{n} k^r \text{ para } r < p$$

Por hipótesis, se puede escribir cada $\sum_{k=1}^{n} k^2$ como una expresión que contiene potencias n^s con $s \le p$.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} + \text{términos que contienen potencias de } n \text{ números menores que } p + 1$$

Problema 2-13 Muestre por *inducción completa* que todo número natural se puede escribir como un producto de primos.

Solución. Suponga que todo número $< n$ se puede descomponer como un producto de primos. Si $n > 1$ no es un primo, entonces $n = ab$ para $a, b < n$.

Por hipótesis, a y b son productos de primos; por tanto, $n = ab$ también lo es.

Problema 2-14 Muestre por *inducción completa* que

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

siendo a_n la sucesión de Fibonacci: $a_1, a_2, \ldots$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

Solución. Como

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

la proposición es verdadera para $n = 1, n = 2$.

Suponga que la proposición es verdadera para $\forall k < n, n \geq 3$. Entonces es verdadera en particular para $n - 1, n - 2$; por tanto,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \ldots = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $x < 0$ y n entero positivo, entonces $x^{2n-1} > 0$.
2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales. Si $|a_1| \leq 1$ y $|a_n - a_{n-1}| \leq 1$, entonces $|a_n| \leq n$.
3. Muestre que $a - b$ es factor de $a^n - b^n$, n entero positivo.
4. Muestre que $a + b$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$, n entero positivo.
5. Pruebe que para todo número real $p \geq 0$ y n entero positivo,

$$(1 + p)^n \geq 1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2$$

6. Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k - 1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x}$.
7. Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
8. Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n$.
9. Pruebe que $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}, r \neq 1$.

10. Pruebe que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

11. Pruebe que $(1 - x)[(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{2^n})] = 1 - x^{2^{n+1}}$ para cualquier entero x, y todo $n \geqslant 0$.

12. Pruebe que 8 es factor de $5^{2n} + 7$, $\forall n \geq 1$.

13. Pruebe que 5 es factor de $7(16^n) + 3$, $n \geq 0$.

14. Pruebe que $1^3 + 3^3 + \dots + (2n + 1)^3 = (n + 1)^2 (2n^2 + 4n + 1)$, $\forall n \geq 1$.

15. Pruebe que si m es un entero no negativo, entonces $1^m + 2^m + \dots + n^m \leq n^{m+1}$, $n \geq 1$.

16. Descubra la falacia que hay en el siguiente razonamiento por inducción: Sea $P(n)$. Si a y b son enteros no negativos, tales que $a + b \leq n \Rightarrow a = b$, primero observe que $P(0)$ es verdadera. Sean a y b enteros, tales que $a + b \leq k + 1$, y defina c y d por $c = a - 1$, $d = b - 1$. Entonces $c + d = a + b - 2 \leq \leq k + 1 - 2 \leq k$. La verdad de $P(k)$ implica que $a = b$; es decir, $P(k + 1)$ es verdadera. Se concluye que $P(x)$ es verdadera para todo $n \geq 0$.

17. Defina el símbolo $n!$ por $0! = 1$ y $n! = n(n - 1)!$ para $n \geq 1$.
Pruebe que: *a)* si $k! = a(r - 1)!\,(k + 1 - r)!$ y *b)* $k! = br!\,(k - r)! \Rightarrow (k + 1)! = (a + b)r!\,(k + 1 - r)!$

18. Halle fórmulas para las siguientes sumas y demuéstrelas por inducción:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1)$. *Resp.:* $\dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

b) $\dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{(1 + x^2)^2} + \dots + \dfrac{1}{(1 + x^2)^n}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2(1 + x^2)^n}$

19. Pruebe por inducción que para cualquier entero $k > 1$ y n entero positivo:

a) $\dfrac{n^{k+1}}{(k + 1)} \geq 1 + 2^k + 3^k + \dots + (n - 1)^k$.

b) $\dfrac{n^{1-1/k}}{1 - 1/k} \geq 1 + 2^{-1/k} + 3^{-1/k} + \dots + n^{-1/k}$.

Indicación. *b)* Si $n = 1$ se verifica. Si es verdadera para n lo será para $n + 1$ si

$$\frac{n^{1-1/k}}{1 - 1/k} + (n + 1)^{-1/k} \leq \frac{(n + 1)^{1-1/k}}{1 - 1/k} \Leftrightarrow n^{1-1/k} \leq (n + 1)^{-1/k}\left[n + \frac{1}{k}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{1/k}\left[1 + \frac{1}{nk}\right] \Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{n}{n + 1}\right)\left[1 + \frac{1}{nk}\right]^k$$

Pero

$$\left(\frac{n}{n + 1}\right)\left[1 + \frac{1}{nk}\right]^k \geq \frac{n}{n + 1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Por tanto, la última desigualdad es correcta.

20. Pruebe por inducción que:

a) $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \dfrac{1 - (n + 1)q^n + nq^{n+1}}{(1 - q)^2}$.

b) $(1 + q)(1 + q^2) \dots (1 + q^{2^n}) = \dfrac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}$.

Indicación. *a)* Es verdadera para $n = 1$. Si es verdadera para $n = k$, entonces

$$(1 + 2q + \dots + kq^{k-1}) + (k + 1)q^k = \frac{1 - (k + 1)q^k + kq^{k+1}}{(1 - q)^2} + (k + 1)q^k =$$

$$= \frac{1 - (k + 1)q^k + kq^{k+1} + (k + 1)(q^k - 2q^{k+1} + q^{k+2})}{(1 - q)^2} = \frac{1 - (k + 2)q^{k+1} + (k + 1)q^{k+2}}{(1 - q)^2}$$

lo cual prueba el resultado para $n = k + 1$.

21. Demuestre la desigualdad de Cauchy por inducción:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2$$

Solución. El resultado es verdadero para $n = 1$.
Suponga que se verifica para $n = k$:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2$$

Entonces, para $n = k + 1$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_1^k a_i^2\right)\left(\sum_1^k b_i^2\right) + 2|a_{k+1}b_{k+1}|\sqrt{\sum_1^k a_i^2}\sqrt{\sum_1^k b_i^2} + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_1^k a_i^2\right)\left(\sum_1^k b_i^2\right) + a_{k+1}^2\sum_1^k b_i^2 + b_{k+1}\sum_1^k a_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \left(\sum_1^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_1^k b_i^2\right) + b_{k+1}^2\sum_1^k a_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 = \left(\sum_1^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_1^{k+1} b_i^2\right)$$

Se empleó $(A - B)^2 \geq 0$.

22. Demuestre que el producto de tres enteros consecutivos, $n, n + 1, n + 2$ es divisible por 6.

23. Muestre que $2^n < n! < n^n$ para $n \geq 4$.

Indicación. Remplace n por $m + 3$ y verifique la inducción sobre m.

24. Halle el «error» en la siguiente demostración por inducción de: Todos los números de un conjunto de n números son iguales.

Demostración. Sea P_n la proposición dada.
1. P_1 es verdadera porque todo número es igual a sí mismo.
2. Suponga que P_k es verdadera y considere un conjunto arbitrario de $k + 1$ elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Entonces, como $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y $a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$ contienen k números, la hipótesis de inducción implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$ y $a_2 = a_3 = \ldots = a_{k+1}$. De esto se sigue que $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k+1}$; es decir, P_{k+1} es verdadera. Entonces, por inducción, P_{k+1} es verdadera para todo natural n.

25. Se define $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$; $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$; $n \geq 2$.

Demuestre por inducción que:

a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$; $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$; $\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1$ si $n \geq 2$

b) Teniendo en cuenta las identidades: 1. $(i+1) - i = 1$. 2. $(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$. 3. $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$. 4. $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$. Demuestre las siguientes fórmulas:

$$\text{(I)} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \text{ (II)} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

26. Defina por inducción el producto $\prod_{k=1}^{n} a_k$ y demuestre por inducción que:

a) $\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$.

b) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ si cada $a_i \neq 0$.

c) Si $x \neq 1$, $\prod_{i=1}^{n} (1 + x^{2^{i-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$, ¿cuál es su valor si $x = 1$?

27. Use el teorema del binomio para mostrar que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{i!}\prod_{r=0}^{i-1}\left(1 - \frac{r}{n}\right)\right\}$$

CAPITULO 3

Límite de una función

El concepto de límite de una función es la idea central del cálculo, tal vez el más importante y a la vez el más difícil de asimilar.

El cálculo está formado por un conjunto de teorías y técnicas que permiten calcular varios tipos de límites y emplea el concepto de límites para resolver algunos problemas. Por estas razones se aconseja dominar tanto el aspecto teórico como las partes técnicas de este capítulo.

Antes de dar una definición formal del concepto de límite se van a dar una serie de ejemplos que crean las bases y a la vez facilitan la comprensión de los distintos términos que intervienen en la definición del límite de una función.

Ejemplo 3-1. Dadas las siguientes funciones: *a)* $f_1(x) = x^3 + 1$, $\forall x$; *b)* $f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$;

c) $f_3(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $\forall x \neq 2$; *d)* $f_4(x) = 1/(x - 1)$, $\forall x \neq 1$; *e)* $f_5(x) = 1/(x^2 + 1)$, dibuje sus grafos. Calcule algunos valores funcionales para f_1 en las proximidades de 0; lo mismo para f_2 en las proximidades de 1.

Solución. (Vea Figuras 3-1 a 3-5.)

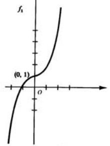


Figura 3-1

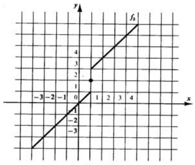


Figura 3-2

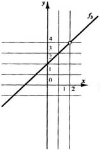


Figura 3-3

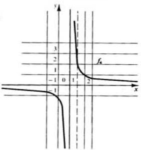


Figura 3-4

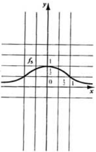


Figura 3-5

Observe lo siguiente:

x	1	-1	0,5	$-0,5$	$+0,1$	$-0,1$	0,01	$-0,01$
$f_1(x)$	2	0	1,125	0,875	1,001	0,999	1,000001	0,999999

x	1	1,5	1,2	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f_2(x)$	4	3,5	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001

También observe lo siguiente:

$f_1(x)$ se aproxima a 1 si x se aproxima a cero y $f_1(1) = 1$.
$f_2(x)$ se aproxima a 1 si x se aproxima a 1 por la izquierda.
$f_2(x)$ se aproxima a 3 si x se aproxima a 1 por la derecha; $f_2(1) = 2$.
$f_3(x)$ se aproxima a 4 si x se aproxima a 2 por cualquier lado.
$f_4(x)$ se hace cada vez mayor si x se aproxima a 1 por la derecha.
$f_4(x)$ se hace cada vez mayor negativamente si x se aproxima a 1 por la izquierda.
$f_5(x)$ se aproxima a 0 si x tiende a ∞.

¿Cuáles de los siguientes resultados son verdaderos o falsos?

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1;\ \lim_{x\to 1} f_2(x) = 2;\ \lim_{x\to 1} f_2(x) = 1$$

Recuerde que

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ si $f(x)$ se aproxima a L_1 cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda.

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$ si $f(x)$ se aproxima a L_2 cuando x se aproxima a x_0 por la derecha.

¿Cuáles de los siguientes resultados son verdaderos o falsos?

a) $\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = 1$; *b)* $\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = 3$; *c)* $\lim_{x\to 2} f_3(x) = 4$; *d)* $\lim_{x\to 0^+} f_3(x) = 1$; *e)* $\lim_{x\to 1} f_2(x) = 2$;

f) $\lim_{x\to 1^+} f_4(x) = +\infty$; *g)* $\lim_{x\to 1^-} f_4(x) = -\infty$; *h)* $\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = 0$; *i)* $\lim_{x\to -\infty} f_5(x) = 0$.

Resp.: VVVFFVVVV.

Ejemplo 3-2. Si f se define por el siguiente grafo, calcule:

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; *b)* $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; *c)* $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; *d)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$;

e) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$; *f)* $\lim_{x\to 5^-} f(x)$; *g)* $\lim_{x\to 5^+} f(x)$; *h)* $\lim_{x\to 5} f(x)$.

Resp.: 1, 2; no existe, 1, $+\infty$, 2, 2, 2.

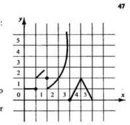


Figura 3-6

Recuerde que: $V_r(a) =]a - r, a + r[$ es un entorno de radio r y centro en $a = \{x : |x - a| < r\}$.

$V_r^*(a) =]a - r, a + r[- \{a\}$ es el entorno anterior sin el punto a.

Ejemplo 3-3. Si $f_3(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, $x \neq 2$, *a)* ¿para qué valores de x se tiene que $f_3(x) \in V_{1/2}(4)$?; *b)* ¿para qué valores de x, $f_3(x) \in V_{1/4}(4)$?; *c)* ¿para qué valores de x, $f_3(x) \in V_r(4)$?

Solución.

a) El grafo muestra que $f_3(x) = a$ y $f_3(d) = b$.

Como $f_3(x) = x + 2$ para $x \neq 2$, entonces

$$c + 2 = a \qquad\qquad d + 2 = b$$
$$c + 2 = 4 - 1/2 \qquad\qquad d + 2 = 4 + 1/2$$
$$c = 4 - 1/2 - 2 = 3/2 \qquad\qquad d = 4 + 1/2 - 2 = 2\,1/2$$

es decir, todos los $x \in V_{1/2}^*(2)$; en otras palabras, todos los $x \in]3/2, 5/2[$ excepto $x = 2$.

b)
$$f_3(x) = a = 4 - 1/10 \qquad\qquad f_2(d) = b = 4 + 1/10$$
$$c + 2 = 4 - 1/10 \qquad\qquad d + 2 = 4 + 1/10$$
$$c = 1\,9/10 \qquad\qquad d = 2\,1/10$$

Es decir, todos los $x \in V_{1/10}^*(2)$ excepto $x = 2$.

c)
$$f_3(x) = 4 - r \qquad\qquad f_3(d) = 4 + r$$
$$2 + c = 4 - r \qquad\qquad 2 + d = 4 + r$$
$$c = 2 - r \qquad\qquad d = 2 + r$$

Es decir, todos los $x \in V_r^*(2)$ excepto $x = 2$.

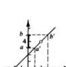


Figura 3-7

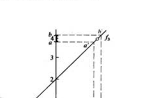


Figura 3-8

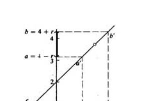


Figura 3-9

Ejemplo 3-4. Si $f_1(x) = x^3 + 1$, *a)* ¿para qué valores de x se tiene que $f_1(x) \in V_r(1)$?; *b)* si $g(x) = 1/x$ para $x > 0$, ¿para qué valores de x, $g(x) \in V_1(2)$?; *c)* ¿para qué valores de x, $g(x) \in V_r(2)$?

Solución.

a)

$$f_1(c) = 1 - 1/8 \qquad\qquad f_1(d) = 1 + 1/8$$
$$c^3 + 1 = 1 - 1/8 \qquad\qquad d^3 + 1 = 1 + 1/8$$
$$c^3 = -1/8 \qquad\qquad d^3 = 1/8$$
$$c = -1/2 \qquad\qquad d = 1/2$$

Así, $f_1(x) \in V_{1/8}(1)$ si $x \in V_{1/2}(0)$. En este caso no se excluye $x = 0$.

b)

$$g(c) = 1/c \qquad\qquad g(d) = 1/d$$
$$1/c = 2 - 1 \qquad\qquad 1/d = 2 + 1$$
$$c = 1 \qquad\qquad d = 1/3$$

Así, $g(x) \in V_1(2)$ si $x \in (1/3, 1)$.

c)

$$1/c = 2 - r \qquad\qquad 1/d = 2 + r$$
$$c = 1/(2 - r) \qquad\qquad d = 1/(2 + r)$$

Así, $g(x) \in V_r(2)$ si $x \in \left]\dfrac{1}{2 + r}, \dfrac{1}{2 - r}\right[$.

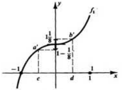


Figura 3-10

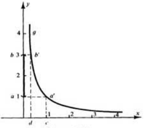


Figura 3-11

Ejemplo 3-5. En los siguientes ejemplos, *a)* dibuje sus grafos y lea el límite cuando $x \to x_0$; *b)* construya la figura geométrica que ilustre los entornos; *c)* ¿para qué valores de x se tiene que el valor funcional de x esté en $V_r(L)$?

1. $g(x) = 3x - 1$, $\forall x$ $\quad x_0 = 1$
2. $h(x) = |x|$ $\quad x_0 = 0$
3. $k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

Solución.

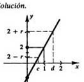


Figura 3-12

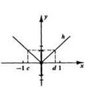


Figura 3-13

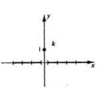


Figura 3-14

$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$ $\quad g(c) = 2 - r \qquad g(d) = 2 + r$

$3c - 1 = 2 - r \qquad 3d - 1 = 2 + r$

$c = 1 - r/3 \qquad d = 1 + r/3$

Así, $g(x) \in V_r(2)$ si $x \in V_{r/3}(1)$.

2. $\lim_{h \to 0} h(x) = 0 \qquad h(c) = 0 + r \qquad h(d) = 0 + r$

$|c| = r \qquad |d| = r$

$c = -r \qquad d = r$

Así, $h(x) \in V_r(0)$ si $x \in V_r(0)$.

3. El grafo muestra que $k(x) \in V_r(0)$, $x \neq 0$, es decir, $k(x) = 0$, $\forall x \neq 0$.

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición:

Definición Decimos que f tiene un límite L cuando x se aproxima a x_0 si para cualquier entorno $V_r(L)$ se puede hallar un entorno $V_s^*(x_0)$ tal que si $x \in V_s^*(x_0)$, entonces $f(x) \in V_r(L)$. Se escribe $\lim f(x) = L$.

Nota Para verificar que $\lim f(x) = L$, hay que comprobar que dado el entorno $V_r(L)$ se debe hallar un entorno $V_s^*(x)$ que cumpla con las condiciones de la definición.

Volviendo al Ejemplo 3-1, vimos que $\lim_{x \to 2} f_3(x) = 4$. Para verificar esto se halló que para cualquier número positivo r, $f(x) \in V_r(4)$ cuando $x \in V_r^*(2)$. Esto muestra que las condiciones de la definición se cumplen si se toma $s = r$.

Observe lo siguiente: al elegir $s = r$ se halló el máximo entorno posible $V_s^*(2)$. Si se elige otro entorno más pequeño se sigue cumpliendo la definición. Por consiguiente, si $t_1 < t_2$, entonces $V_{t_1}^*(2) \subset V_{t_2}^*(2)$ y, por tanto, se puede elegir a $s = r/2$ o $r/3$ o cualquier número menor que r, y la definición se sigue cumpliendo.

La Figura 3-15 muestra que un entorno menor que $V_r^*(2)$ satisface a la definición. La recta de puntos y guiones muestra el cálculo corriente de s para todo x tal que $f_3(x) \in V_r(4)$. Partiendo del entorno menor $V_s^*(2)$, la parte rayada indica que la definición se sigue cumpliendo para este entorno menor. Si $x \in V_s^*(2)$, entonces $f(x) \in V_r(4)$.

Figura 3-15

Veamos otros ejemplos. Considere la función $g(x)$ del Ejemplo 3-4. Según ese problema, $g(x) \in V_r(2)$ si $x \in \left]\frac{1}{2+r}, \frac{1}{2-r}\right[$. En este ejemplo se presenta una pequeña dificultad debida a que el intervalo no está centrado en $x = 1/2$.

Considerando la Figura 3-11 se debe hallar qué punto está más cercano de 1/2 y construir de acuerdo a esto el entorno. En efecto,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2+r} = \frac{2+r-2}{4+2r} = \frac{r}{4+2r}; \quad \frac{1}{2-r} - \frac{1}{2} = \frac{2-(2-r)}{4-2r} = \frac{r}{4-2r}$$

Es evidente que

$$\frac{r}{4+2r} < \frac{r}{4-2r}$$

Para s se puede elegir el número $\leq r/(4+2r)$. Para evitar el cálculo anterior, para que $\lim g(x) = 2$, se elige a s de la siguiente manera:

$$s \leq \text{mínimo de} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2+r}, \ \frac{1}{2-r} - \frac{1}{2}\right\}$$

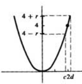


Figura 3-16

Ejemplo 3-6. Pruebe que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. La Figura 3-16 muestra que la función es creciente alrededor de $x_0 = 2$.

El siguiente cálculo muestra que dado el entorno $V_r(4)$ se puede hallar el entorno $V_s^*(2)$ tal que para todo $x \in V_s^*(2)$ implica que $f(x) \in V_r(4)$.

$$c^2 = 4 - r \qquad d^2 = 4 + r$$
$$c = \sqrt{4 - r} \qquad d = \sqrt{4 + r}$$

Tome a $s = \text{mínimo } \{2 - \sqrt{4 - r}, \sqrt{4 + r} - 2\}$

Para dar una definición formal del límite es conveniente introducir el concepto de punto de acumulación.

Definición. x_0 es un punto de acumulación o punto adherente de un conjunto $S \Leftrightarrow$ todo intervalo abierto centrado en x_0 contiene puntos de S distintos de x_0. Esto quiere decir que S tiene puntos distintos de x_0 en cualquier proximidad arbitraria que se dé de x_0.

Así, $\sqrt{2}$ es un punto de acumulación de los números racionales entre 1 y 1,4. En otras palabras, podemos resumir lo anterior diciendo que x_0 no es punto de acumulación de S si existe por lo menos un intervalo abierto centrado en x_0 que no contenga puntos de S excepto posiblemente x_0.

Se introdujo este concepto para que cuando exista el límite sea único. Porque si x_0 no es un punto de acumulación del dominio de f, no existen números x en el dominio de f que cumplan con la condición $0 < |x - x_0| < \delta$, y todo número L es el límite de f en x. Todos los dominios de las funciones son intervalos y todo punto de un intervalo es un punto de acumulación del intervalo.

Definición de límite para funciones R → R (es decir, funciones que aplican reales en reales)

Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y x_0 un punto de acumulación del dominio de f.

1. $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow L \in \mathbf{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_f = \delta_f(\varepsilon, x_0)$, es decir, se elige de tal manera que sirva para f, ε y x_0, tal que $x_0 \in \mathscr{D}_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

El símbolo $\lim_{x \to x_0} f$ designa un punto L (si existe) en el conjunto de valores de f que satisface las condiciones de que para todo ε existe una desviación δ_f tal que toda preimagen de x (excepto posiblemente x_0) tiene una imagen $f(x)$ dentro del error ε de L si x está dentro de la desviación δ_f del punto de aproximación x_0.

2. f es convergente en $x_0 \Leftrightarrow$ existe un L tal que $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Observe las Figuras 3-17 y 3-18.

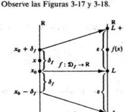


Figura 3-17

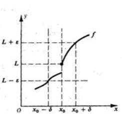


Figura 3-18

La definición anterior de límite, traducida al lenguaje de los entornos, es la siguiente: si f es una aplicación de $\mathscr{D}_f \to \dot{\mathbf{R}}$ y x_0 un punto de acumulación del $\mathscr{D}_f$, se dice que f tiene un límite L cuando x se aproxima a x_0 si todo entorno de L contiene la imagen, por f, de un entorno $V^*(x_0)$. En otras palabras,

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall V(L),\ \exists V^*(x_0) \quad \text{tal que} \quad f[V^*(x_0)] \subset V(L)$$

Nota. Observe que en la parte 1 de la definición la hipótesis $0 < |x - x_0|$ significa que $x \neq x_0$. Esto libera al punto x_0 de la posibilidad de que tenga una imagen; en caso de que la imagen exista, la condición $|f(x_0) - L| < \varepsilon$ puede que no se cumpla. En otras palabras, la idea de límite descarta lo que sucede en x_0; se interesa únicamente en lo que sucede en los entornos de x_0.

La condición $\delta_f = \delta_f(\varepsilon, x_0)$ se utiliza para recordar que el extremo de desviación se elige para satisfacer las peculiaridades de f, ε y x_0.

La imagen geométrica ayuda a recordar que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Significa que

$$f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Análogamente, $0 < |x - x_0| < \delta_f \Leftrightarrow x \in]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[- \{x_0\}$. Es decir, x pertenece a un entorno de x_0, al cual no pertenece x_0, y se designa por $V^*(x_0)$; δ_f es el radio del entorno.

Entonces se escribe $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$, si para todo intervalo abierto $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ centrado en L existe un intervalo abierto $]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[$ centrado en x_0 tal que

$$x \in \mathscr{D}_f \cap \{]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[- \{x_0\}\} \Rightarrow f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

La interpretación geométrica del límite según el diagrama de la Figura 3-18 es la siguiente: sea (x_0, L) un punto del grafo. Para un $\varepsilon > 0$ dado dibuje las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. La definición de $\lim_{x \to x_0} f = L$ exige que, dado $\varepsilon > 0$, se pueda hallar un $\delta > 0$ tal que los puntos $(x, f(x))$ sobre el grafo de f (con $x \neq x_0$) estén entre las rectas verticales $x = x_0 - \delta$ y $x = x_0 + \delta$, y también estén entre las rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. Equivale a decir que no importa lo cercanas que se dibujen las rectas $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$; se pueden dibujar las rectas verticales $x = x_0 + \delta$ y $x = x_0 - \delta$ de tal manera que los puntos del grafo de f, excepto posiblemente $(x_0, f(x))$, estén entre las rectas verticales, y también entre las rectas horizontales. Decir que el límite no existe equivale a que tal construcción no es posible.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-1 Muestre que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$, c = constante.

Solución. Se debe mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. En este caso, se puede tomar por δ cualquier número positivo. Entonces:

$$|f(x) - c| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta$$

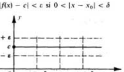


Figura 3-19

Problema 3-2 Demuestre que $\lim\limits_{x \to 3} 4x = 12$, mostrando que para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que $|x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon$.

Solución. Como $|4x - 12| = 4|x - 3|$, es evidente que

$$|x - 3| < \varepsilon/4 \Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon \tag{1}$$

Por tanto, se puede tomar por $\delta = \varepsilon/4$. (1) en particular dice que

$$|x - 3| < 0{,}0025 \Rightarrow |4x - 12| < 0{,}01$$
$$|x - 3| < 0{,}00025 \Rightarrow |4x - 12| < 0{,}001$$

y, en general,

$$|x - 3| < 0{,}25 \cdot 10^{-k} \Rightarrow |4x - 12| < 10^{-k}$$

Problema 3-3 Sea $f(x) = 4x - 1$. Si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 11$, halle δ para $\varepsilon = 0{,}01$ tal que $|f(x) - 11| < 0{,}01$ cuando $0 < |x - 3| < \delta$.

Solución. $|f(x) - 11| = |(4x - 1) - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3|$; por tanto, se quiere que $4|x - 3| < 0{,}01$ cuando $0 < |x - 3| < \delta$ o $|x - 3| < 0{,}0025$ cuando $0 < |x - 3| < \delta$.

Si se toma a $\delta = 0{,}0025$, se tiene que

$$|(4x - 1) - 11| < 0{,}01 \text{ cuando } 0 < |x - 3| < 0{,}0025$$

Es importante darse cuenta que cualquier número positivo menor que 0,0025 se puede emplear en vez del δ pedido. Es decir, si $0 < \gamma < 0{,}0025$, entonces

$$|(4x - 1) - 11| < 0{,}01 \text{ cuando } 0 < |x - 3| < \gamma$$

En este ejemplo se hallaron varios δ para un ε dado; para mostrar que el valor del límite es 11, basta tomar un solo δ.

Problema 3-4 Muestre que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 11$ si $f(x) = 4x - 1$.

Solución. Se quiere mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que

$$|f(x) - 11| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 3| < \delta$$

Como $|(4x - 1) - 11| = 4|x - 3|$, entonces se quiere que $4|x - 3| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 3| < \delta$. Esto nos dice que basta tomar a $\delta = \varepsilon/4$, puesto que

$$4|x - 3| < 4\delta \quad \text{cuando } 0 < |x - 3| < \delta$$
$$4|x - 3| < 4(\varepsilon/4) \quad \text{cuando } 0 < |x - 3| < \delta$$
$$4|x - 3| < \varepsilon \quad \text{cuando } 0 < |x - 3| < \delta$$

Por tanto, $|(4x - 1) - 11| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 3| < \delta$ si $\delta = \varepsilon/4$.
Si $\varepsilon = 0{,}01$, entonces se toma a $\delta = 0{,}0025$.

Problema 3-5 Muestre que: *a)* $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; *b)* $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$; *c)* $\lim\limits_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$.

Solución. 1. Hay que mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

a) $|f(x) - L| = |x - x_0| < \varepsilon$. Como $0 < |x - x_0| < \delta_f$, basta tomar a $\delta = \varepsilon$; esto muestra que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

$b)$ $|f(x) - L| = |x^2 - x_0^2|$.

Aplicando la desigualdad $|xy - ab| \le (1 + |a|)\,|y - b| + |b|\,|x - a|$ si $|x - a| < 1$ a la expresión $|x^2 - x_0^2|$ se obtiene $|x \cdot x - x_0 \cdot x_0| \le (1 + |x_0|)\,|x - x_0| + |x_0|\,|x - x_0|$ si $|x - x_0| < 1$.

Si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \le (1 + |x_0|)\delta + |x_0|\delta = (1 + 2|x_0|)\delta$.

Como $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, es decir, $(1 + 2|x_0|)\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right)$, lo cual muestra que $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

$c)$ $|f(x) - L| = |x^3 - x_0^3|$.

Aplicando la desigualdad $|xy - ab| \le (1 + |a|)\,|y - b| + |b|\,|x - a|$ si $|x - a| < 1$ a la expresión $|x^3 - x_0^3|$ se obtiene

$$|x \cdot x^2 - x_0 \cdot x_0^2| \le (1 + |x_0|)\,|x^2 - x_0^2| + |x_0^2|\,|x - x_0| \text{ si } |x - x_0| < 1$$

$$\le (1 + |x_0|)(1 + 2|x_0|)\delta + |x_0^2|\delta, \text{ teniendo en cuenta } b)$$

$$= (1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|)\delta$$

Como $|x^3 - x_0^3| < \varepsilon \Rightarrow (1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2) < \varepsilon$, entonces se puede tomar como

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\right)$$

2. Los cálculos se basan en la factorización $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Entonces

$$x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) \tag{1}$$

Para obtener (1) en la forma $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^3 - x_0^3| \le M|x - x_0|$ se resuelve $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 + xx_0 + x_0^2| \le M$ para δ y M. Para obtener estos valores escriba $x = (x - x_0) + x_0$, de manera que

$$|x^2 + xx_0 + x_0^2| = |[(x - x_0) + x_0]^2 + x_0[(x - x_0) + x_0] + x_0^2| = |(x - x_0)^2 + 3x_0(x - x_0) + 3x_0^2| \le$$
$$\le |x - x_0|^2 + 3|x_0|\,|x - x_0| + 3| \tag{2}$$

Según (2) vemos que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 + xx_0 + x_0^2| < \delta^2 + 3|x_0|\,\delta + 3|x_0|^2 \tag{3}$$

Arbitrariamente hagamos $\delta = 1$, entonces

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 + xx_0 + x_0^2| \le 1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|$$

Teniendo en cuenta (1):

$$|x - x_0| < 1 \Rightarrow |x^3 - x_0^3| < (1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|)(x - x_0) \tag{4}$$

De la misma manera, de (4) se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < 1 \\ \text{y} \\ |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |x^3 - x_0^3| < (1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|)(x - x_0) \\ (1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|)\,|x - x_0| < \varepsilon \end{array}$$

Por tanto, $|x - x_0| < \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|}\right)$ $\therefore$ $\lim\limits_{x \to x_0} x^3 = x_0^3$.

Problema 3-6 $a)$ Muestre que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $b)$ $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$.

Solución. $a)$ Teniendo en cuenta la parte $b)$ del problema anterior, tenemos que $x_0 = 2$, $L = 4$; entonces

$|x^2 - 4| \le (1 + 2|2|)\delta = 5\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta < \varepsilon/5$ si $|x - 2| < 1$. Esto nos dice que se debe tomar δ como $\delta = \min(1, \varepsilon/1 + 2 \cdot 2) = \min(1, \varepsilon/5)$.

b) Teniendo en cuenta la parte *c*) del problema anterior, se tiene que

$$x_0 = 2,\ L = 8, \text{ entonces } |x^3 - 8| \le (1 + 3|2| + 3|2|^2)\delta = 19\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{19}$$

Esto nos dice que se debe tomar a δ como $\delta = \min(1, \varepsilon/19)$.

Problema 3-7 Muestre que $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 3x + 1) = 10$.

Solución. Es conveniente escribir a $|f(x) - L| = |g(x)|\,|x - x_0| \le M|x - x_0|$, M una constante, es decir, se factoriza a $|x - x_0|$ de $|f(x) - L|$.

$$|(2x^2 - 3x + 1) - 10| = |2x^2 - 3x - 9| = |2x + 3|\,|x - 3|$$

Si $|x - 3| < 1$, $2 < x < 4$, $7 < 2x + 3 < 11$ y $|2x + 3|\,|x - 3| < 11\,|x - 3|$. Pero $11|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |x - 3| < \varepsilon/M$. Lo cual nos dice que se debe tomar a $\delta = \min(1, \varepsilon/11)$; entonces

$$|(2x^2 - 3x + 1) - 11| = |2x + 3|\,|x - 3| \le 11|x - 3| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - 3| < \delta$$

Problema 3-8 Muestre que $\lim_{t \to 7} 8/(t - 3) = 2$.

Solución. Se debe mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{8}{t-3} - 2\right| < \varepsilon$ cuando $0 < |t - 7| < 8$.

$$\left|\frac{8}{t-3} - 2\right| = \left|\frac{8 - 2(t-3)}{t-3}\right| = \frac{2|7 - t|}{t - 3} = |t - 7|\frac{2}{|t - 3|}$$

Se quiere mostrar que $|8/(t - 3) - 2|$ es pequeño cuando t se aproxima a 7. Vamos a hallar un extremo superior para la fracción $2/|t - 3|$. Si t se aproxima a 7, $|t - 7|$ es pequeño. Como t se aproxima a 7, se toma a $|t - 7| < 1$, lo cual exige que $\delta < 1$.

$|t - 7| < 1$ es equivalente a $-1 < t - 7 < 1 \Leftrightarrow 6 < t < 8 \Leftrightarrow 3 < t - 3 < 5$ o $|t - 3| > 3$. Por tanto, se tiene que $|8/(t - 3) - 2| = |t - 7|(2/|t - 3|) < |t - 7|(2/3)$ cuando $|t - 7| < 1$ (puesto que $|t - 3| > 3$).

Ahora necesitamos que $|t - 7| < (3/2)\varepsilon$. Esto nos dice que se debe tomar a δ como $\delta = \min[1, (3/2)\varepsilon]$, lo cual asegura que cuando $|t - 7| < \delta$, entonces $|t - 7| < (3/2)\varepsilon$ y $|t - 3| > 3$ (puesto que esto es verdadero cuando $|t - 7| < 1$).

Finalmente, $$\left|\frac{8}{t-3} - 2\right| < |t - 7|\frac{2}{3} < \frac{3}{2}\varepsilon \cdot \frac{2}{3} = \varepsilon$$

Por tanto, $$\lim_{t \to 7} \frac{8}{t - 3} = 2$$

Problema 3-9 Muestre que para todo $x_0 \in \mathbf{R}$, sen x y cos x son convergentes en x_0 y que $\lim_{x \to x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0$ y $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Solución. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, la Figura 3-20 muestra que se verifican las relaciones:

$$|\text{sen } x - \text{sen } x_0| < |x - x_0| \text{ y } |\cos x - \cos x_0| < |x - x_0|$$

Si se toma a $\delta_{\text{sen}} = \varepsilon$ y $\delta_{\cos} = \varepsilon$ como desviaciones, se tiene que

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |\text{sen } x - \text{sen } x_0| < \varepsilon \text{ y } |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

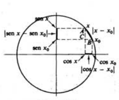


Figura 3-20

Teorema sobre límite de funciones

Teorema. Sean f y g un par de funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y x_0 un punto de acumulación de $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$, f y g convergentes en x_0, $\lim_{x \to x_0} f = A$ y $\lim_{x \to x_0} g = B$. Entonces:

Las funciones $f + g$, cg (c real), f, g, $1/g$, f/g son convergentes en x_0, con la hipótesis adicional de que $B \neq 0$ en los casos $1/g$ y f/g. Se tiene que

a) $\lim (f \pm g) = A \pm B$, *b)* $\lim_{x \to x_0} cg = cB$, *c)* $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g) = A \cdot B$, *d)* $\lim_{x \to x_0} (1/g) = 1/B$ si $B \neq 0$, *e)* $\lim_{x \to x_0} (f/g) = A/B$ si $B \neq 0$.

Demostración. La clave de la demostración es la siguiente lista de aproximaciones, obtenidas [excepto (3-2) que es evidente] haciendo $f(x)$, $g(x)$, A y B, desempeñar los papeles de los elementos que intervienen en las fórmulas:

$$|[f(x) + g(x)] - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \tag{3-1}$$

$$|cg(x) - cB| = |c|\,|g(x) - B| \tag{3-2}$$

$$|f(x)g(x) - AB| \leq (1 + |A|)\,|g(x) - B| + |B|\,|f(x) - A| \text{ si } |f(x) - A| < 1 \tag{3-3}$$

$$|1/g(x) - 1/B| < \frac{2}{|B|^2}|g(x) - B| \text{ si } |g(x) - B| \leq \frac{|B|}{2} \tag{3-4}$$

$$|f(x)/g(x) - A/B| \leq \frac{2|A|}{|B|^2}|g(x) - B| + \frac{2}{|B|}|f(x) - A| \text{ si } |g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \tag{3-5}$$

Para cualquier ε dado, se trata de acotar (si es posible) las distancias $|f(x) - A|$ y $|g(x) - B|$ para garantizar que los segundos miembros de las desigualdades (3-1)-(3-5), y por implicación los primeros, sean menores que ε.

Para (3-1) las condiciones $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ sirven, puesto que al sumarlas, el segundo miembro de (3-1) es menor que ε.

Para (3-2) se requiere que $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ si $c \neq 0$, puesto que el segundo miembro de (3-2) es menor que ε. Si $c = 0$, ambos miembros de (3-2) son cero y no se necesita imponer ninguna condición puesto que $0 < \varepsilon$.

Para (3-3) se deja como ejercicio el caso $B = 0$. Si $B \neq 0$, se pide que

$$|f(x) - A| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|B|}\right) \quad \text{y} \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |A|)}$$

para que el segundo miembro de (3-3) sea menor que ε.

Finalmente, para (3-5) se pide que

$$|f(x) - A| < \frac{|B|}{4}\varepsilon \quad \text{y} \quad |g(x) - B| < \min\left(\frac{|B|}{2}, \frac{\varepsilon|B|^2}{4|A|}\right)$$

con el fin de que el segundo miembro de (3-5) sea menor que ε.

¿Se verifican las restricciones (3-1)-(3-5)? Es decir, ¿se pueden hacer tan pequeños como se quiera a $|f(x) - A|$ y $|g(x) - B|$? La respuesta es afirmativa, porque precisamente éste es el significado de la hipótesis de que f y g sean convergentes en x_0 y tengan a A y B por límites respectivamente. Esta hipótesis de convergencia garantiza que existen desviaciones para restringir suficientemente a $|x - x_0|$ con el fin de que $|f(x) - A|$ y $|g(x) - B|$ sean menores

que cualquier error dado de antemano. Así, para completar la demostración de a) se observa que existen desviaciones $\delta_f = \delta_f\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$ y $\delta_g = \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$ tales que

$$0 < |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3-6}$$

Pero como

$$0 < |x - x_0| < \min(\delta_f, \delta_g) \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_f \\ 0 < |x - x_0| < \delta_g \end{cases} \tag{3-7}$$

Se ve a partir de (3-6) y (3-7) que

$$0 < |x - x_0| < \min(\delta_f, \delta_g) \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{y} \\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{3-8}$$

Sumando se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{y} \\ |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon \tag{3-9}$$

Como consecuencia de la proximidad calculada en (3-1) se tiene que

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \varepsilon \tag{3-10}$$

De (3-8), (3-9) y (3-10) se infiere que

$$0 < |x - x_0| < \min(\delta_f, \delta_g) \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - (A + B)| < \varepsilon \tag{3-11}$$

Como en (3-11), vemos que

$$\delta_{f+g}(\varepsilon, x_0) = \min\left[\delta_f\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right), \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)\right]$$

De manera similar se puede demostrar que

$$\delta_{cg}(\varepsilon, x_0) = \delta_g\left(\frac{\varepsilon}{|c|}, x_0\right) \text{ si } c \neq 0 \tag{3-12}$$

$$\delta_{fg}(\varepsilon, x_0) = \min[\delta_f(\varepsilon', x_0), \delta_g(\varepsilon'', x_0)] \text{ con } \begin{cases} \varepsilon' = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|B|}\right) \\ \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2(1 + |A|)} \end{cases} \tag{3-13}$$

$$\delta_{1/g}(\varepsilon, x_0) = \delta_g(\varepsilon', x_0), \text{ con } \varepsilon' = \min\left(\frac{|B|}{2}, \frac{\varepsilon|B|^2}{2}\right) \tag{3-14}$$

$$\delta_{f/g}(\varepsilon, x_0) = \min[\delta_f(\varepsilon', x_0), \delta_g(\varepsilon'', x_0)] \text{ con } \begin{cases} \varepsilon' = \frac{\varepsilon|B|}{4} \\ \varepsilon'' = \min\left(\frac{|B|}{2}, \frac{\varepsilon|B|^2}{4|A|}\right) \end{cases} \tag{3-15}$$

Teorema límite de la raíz de una función

Teorema. Para todo entero positivo $n \geq 2$, $x_0 \in \mathscr{D}_{\sqrt[n]{}} \Rightarrow \sqrt[n]{x}$ es convergente en x_0 y $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$.

Demostración. Para $n = 2$.

Para todo ε se debe hallar un $\delta_{\sqrt{}} = \delta_{\sqrt{}}(\varepsilon, x_0)$ tal que

$$x \in \mathscr{D}_{\sqrt{}} \quad \& \quad |x - x_0| < \delta_{\sqrt{}} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \tag{3-16}$$

El caso $x_0 = 0$ debe ser tratado separadamente; vea (3-19). Pero esto es fácil, porque si $x_0 = 0$ se tiene que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} \text{ y } |x - x_0| = |x - 0| = x \text{ (porque } x \geq 0)$$

simplemente se toma

$$\delta_{\sqrt{}}(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 \text{ porque } 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \varepsilon$$

(Vea la Figura 3-21.)

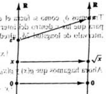


Figura 3-21

Para el caso general $x_0 > 0$ se utiliza la relación

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \tag{3-17}$$

como $|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| = \sqrt{x} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}$, de los extremos de (3-17) se obtiene

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| \tag{3-18}$$

De la misma manera la desviación $\delta_{\sqrt{}}(\varepsilon, x_0) = \sqrt{x_0}\,\varepsilon$ sirve para $x_0 > 0$, porque

$$|x - x_0| < \sqrt{x_0}\,\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \tag{3-19}$$

Teorema del límite para funciones compuestas

Teorema. Sean f & g un par de funciones, $x_0 \in \mathscr{D}_g$, $u_0 = g(x_0) \in \mathscr{D}_f$, g convergente en x_0 y f convergente en $u_0 = g(x_0)$, $\lim_{x \to x_0} g = g(x_0)$ y $\lim_{u \to u_0} f = (u_0)$. Entonces la función $f \circ g$ es convergente en x_0 y $\lim_{x \to x_0} (f \circ g) = f[\lim_{x \to x_0} g(x)]$.

Demostración. El problema consiste en hallar x lo suficientemente cercano a x_0 de manera que $g(x)$ esté tan próximo a $g(x_0)$ para que $f[g(x)]$ se encuentre dentro de la proximidad fijada de $f[g(x_0)]$. Para ser específico, se fija cualquier error ε para $|f[g(x)] - f[g(x_0)]|$.

Primero se elige una desviación δ_f con el fin de que las u estén dentro del intervalo de longitud $2\delta_f$ alrededor de u_0; para que tengan las $f(u)$ a una distancia menor que ε de $f(u_0)$, o simbólicamente

$$|u - u| < \delta_f \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon \tag{3-20}$$

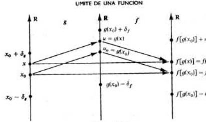


Figura 3-22

Tratemos δ_f como si fuera el error prescrito para $|g(x) - g(x_0)|$ y elijamos una desviación δg para que las x dentro del intervalo de longitud $2\delta g$ alrededor de x_0 conserven las g dentro del intervalo de longitud $2\delta_f$ alrededor de $g(x_0)$; en símbolos

$$|x - x_0| < \delta g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta_f \tag{3-21}$$

Ahora hagamos que $g(x)$ y $g(x_0)$ desempeñen el papel de u y u_0 en (3-20); según (3-21) vemos que

$$|x - x_0| < \delta_g \Rightarrow |f[g(x)] - f[g(x_0)] < \varepsilon \tag{3-22}$$

En otras palabras, (3-22) dice que δ_g es una desviación para $|x - x_0|$ con el error ε fijado para $|f[g(x)] - f[g(x_0)]$. Es decir, en vista de la definición de límite, (3-22) dice que $f[g(x)]$ es convergente en x_0 y que $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)]$.

Teorema del sandwich

Teorema 1. Sean f, g y h funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g = \mathscr{D}_h$. Entonces

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \text{ en } \mathscr{D}_f, \lim_{x \to x_0} g = \lim_{x \to x_0} h = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f = L$$

Demostración. Sea L el límite de g y h en x_0. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tienen δ_g y δ_h tal que

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_g &\Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) \\ 0 < |x - x_0| < \delta_h &\Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow h(x) < L + \varepsilon \end{aligned} \tag{3-23}$$

(recuerde que $|a - b| < c \Leftrightarrow b - c < a < b + c$).

La Figura 3-23 da una motivación geométrica. Por la condición $g(x) \le f(x) \le h(x)$, se tiene

$$L - \varepsilon < g(x) \;\&\; h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \tag{3-24}$$

Como $0 < |x - x_0| < \min(\delta_g, \delta_h) \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_g$ & $0 < |x - x_0| < \delta_h$. De (3-23) y (3-24):

$$0 < |x - x_0| < \min(\delta_g, \delta_h) \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \tag{3-25}$$

De (3-25) vemos que $\delta_f = \min(\delta_g, \delta_h)$ sirve.

Teorema 2. Para toda función f, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\lim_{x \to x_0} |f| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f = 0$.

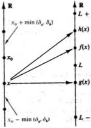


Figura 3-23

Demostración. La clave de la demostración es que la distancia entre $f(x)$ y el origen (en el codominio) es la misma que la distancia entre el valor absoluto de f y el origen; en otras palabras,

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)| - 0| \tag{3-26}$$

Suponga que $|f|$ es convergente en x_0 con límite 0. Entonces, para cualquier error ε que se fije, existe una desviación $\delta_{|f|}$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_{|f|} \Rightarrow ||f(x)| - 0| < \varepsilon \tag{3-27}$$

Según (3-26), vemos de (3-27) que

$$0 < |x - x_0| < \delta_{|f|} \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon \tag{3-28}$$

Es decir, cualquier desviación para la función valor absoluto de f sirve como desviación de f. La otra parte de la demostración se obtiene intercambiando los papeles de f y $|f|$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-10 Halle el $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ e indique el teorema aplicado.

Solución.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5) = \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 \qquad \text{[Vea (3-1) y (3-2)]}$$

$$= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 \qquad \text{[Vea (3-3)]}$$

$$= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$$

Nota. Observe que $f(3) = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$ es lo mismo que $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$. No siempre se verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. (Vea el problema siguiente.) En este caso, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, porque la función es *continua* en $x = 3$.

Problema 3-11 Halle el $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ y muestre los teoremas empleados.

Solución. En este caso no se puede aplicar el teorema anterior al cociente $(x^3 - 27)/(x - 3)$ porque $\lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$. Sin embargo, factorizando el numerador se obtiene

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3}$$

El cociente es $(x^2 + 3x + 9)$ si $x \neq 3$. Al calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ se estan considerando valores de x próximos a 3, pero no iguales a 3. Por tanto, es posible dividir numerador y denominador por $(x - 3)$. Por tanto:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$$

dividiendo numerador y denominador por $(x - 3)$ porque $x \neq 3$.

Así, $\lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} (3x + 9) = \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + 3 \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 9 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 9 = 27$ [Vea (3-1) y (3-3)]

Nota. En este ejemplo, $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ no está definida para $x = 3$, pero, sin embargo, $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ existe y es igual a 27.

Problema 3-12 Halle $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Solución. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\lim_{x \to 4} \sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Problema 3-13 Calcule $\lim x^{p/q}$, con p y q enteros positivos.

Solución. $\lim x^{p/q} = \lim (x^{1/q})^p = (\lim x^{1/q})^p = (x_0^{1/q})^p = x_0^{p/q}$.

Esto es verdad porque se aplicó la convergencia de la función raíz y la regla del producto $(p - 1)$ veces

Problema 3-14 Muestre que la función $f(x) = x^2$ sen $(1/x)$, $x \neq 0$, es convergente en $x_0 = 0$ y tiene por limite 0.

Solución. Como $|\text{sen}\ u| \leq 1$ para cualquier u, se tiene que $0 \leq x^2$ sen $(1/x) \leq x^2$. Haciendo $g(x) = 0$ y $h(x) = x^2$ vemos que $f(x)$ es convergente en $x_0 = 0$ y que tiene por limite 0, porque $g(x)$ y $h(x)$ convergen a 0 en $x_0 = 0$. También se puede poner la función x^2 sen $(1/x)$ en sandwich, entre las funciones $-x^2$ y x^2, puesto que $-1 \leq \text{sen}^2 (1/x) \leq 1$ y $x^2 \geq 0$.

En este caso, $-x^2$ juega el papel de $g(x)$ y x^2 el de $h(x)$.

Problema 3-15 Muestre que la función $f(x) = x$ sen $(1/x)$, $x \neq 0$ es convergente en $x_0 = 0$ y tiene por limite 0.

Solución. Apliquemos el teorema del sandwich a la función $|x\ \text{sen}\ (1/x)|$. Observe que

$$0 \leq |x\ \text{sen}\ (1/x)| \leq |x|$$

Como $|x\ \text{sen}\ (1/x)| = |x|\,|\text{sen}\ (1/x)|$ y $0 \leq |\text{sen}\ (1/x)| \leq 1$. Hagamos que 0 y $|x|$ desempeñen el papel de g y h, respectivamente, en el teorema del sandwich, notando que ambas tienen por limite 0 en $x_0 = 0$. Análogamente, en virtud de la desigualdad anterior, al poner a $|x\ \text{sen}\ (1/x)|$ en sandwich en medio de dos funciones que tienen por limite cero, su limite es cero. El segundo teorema completa la solución, puesto que

$$\lim_{x \to 0} |x\ \text{sen}\ (1/x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x\ \text{sen}\ (1/x) = 0$$

Calcule los siguientes límites:

Problema 3-16 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

Solución. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1}{x + 2} = -2$

Problema 3-17 *a)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$. *Resp.:* $\dfrac{a - 1}{3a^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$ *Resp.:* $+1$

Problema 3-18 *a)* $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y} = \lim\limits_{x\to y} \dfrac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{(x - y)} =$

$= \lim\limits_{x\to y} (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) =$

$= \lim\limits_{x\to y} x^{n-1} + \lim\limits_{x\to y} x^{n-2}y + \lim\limits_{x\to y} x^{n-3}y^2 + \dots + \lim\limits_{x\to y} xy^{n-2} + \lim\limits_{x\to y} y^{n-1} =$

$= y^{n-1} + y^{n-2} \cdot y + y^{n-3} \cdot y^2 + \dots + y \cdot y^{n-2} + y^{n-1} = y^{n-1} + y^{n-1} + \dots + y^{n-1} = ny^{n-1}$.

b) $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

Solución. $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y} = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} = nx^{n-1}$, según *a)*.

Problema 3-19 *a)* $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$.

Solución. Haciendo $x = y^6$ y así cuando $x \to 64$, $y^6 \to 64$ y $y \to \sqrt[6]{64} = 2$.

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{y^6} - 8}{\sqrt[3]{y^6} - 4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y\to 2} \frac{(y - 2)(y^2 + 2y + 4)}{(y - 2)(y + 2)} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2 + 2y + 4}{y + 2} = 3.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$. *Resp.:* $\dfrac{4}{3}$

Problema 3-20 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$.

Solución. Si $x = y^3$, cuando $x \to 1$, $y \to 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y^2 - 2y + 1}{(y^3 - 1)^2} =$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y - 1)^2}{(y - 1)^2 (y^2 + y + 1)^2} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{(y^2 + y + 1)^2} = \frac{1}{9}$$

Problema 3-21 a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

Solución. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Resp.:* $\dfrac{q}{p}$

Problema 3-22 $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$.

Solución. Hagamos $x = y^m$ y $a = b^m$; entonces cuando $x \to a$, $y^m \to b^m$ y $y \to b$.

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a} = \lim_{y\to b} \frac{y-b}{y^m-b^m} = \lim_{y\to b} \frac{(y-b)}{(y-b)(y^{m-1}+y^{m-2}b+\dots+yb^{m-2}+b^{m-1})} =$$

$$= \lim_{y\to b} \frac{1}{y^{m-1}+y^{m-2}b+\dots+yb^{m-2}+b^{m-1}} = \frac{1}{\lim_{y\to b} y^{m-1}+\lim_{y\to b} y^{m-2}b+\dots+\lim_{y\to b} yb^{m-2}+\lim_{y\to b} b^{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{b^{m-1}+b^{m-2}\cdot b+\dots+b\cdot b^{m-2}+b^{m-1}} = \frac{1}{mb^{m-1}} = \frac{1}{m\dfrac{a}{\sqrt[m]{a}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$$

Problema 3-23 Sean m y n enteros positivos arbitrarios. Pruebe que:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$; b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \dfrac{m}{n}$.

Solución. a) Si $x = t+1$, cuando $x \to 1$, $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{n+1}-(n+1)(t+1)+n}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1+(n+1)t+\dfrac{n(n+1)}{2}t^2+\dots+t^{n+1}-(n+1)t-(n+1)+n}{t^2}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0} \dfrac{n(n+1)}{2}+\dots+t^{n-1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ porque los términos que no aparecen, indicados por los puntos, contienen uno o más factores de t.

b) Si $x = t+1$, cuando $x \to 1$, $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)^m-1}{(t+1)^n-1} = \lim_{t\to 0} \frac{1+mt+\dfrac{m(m-1)}{2}t^2+\dots+t^m-1}{1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2+\dots+t^n-1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{m+\dfrac{m(m-1)}{2}t+\dots+t^{m-1}}{n+\dfrac{n(n-1)}{2}t+\dots+t^{n-1}} = \frac{m}{n}$$

Problema 3-24 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$.

Solución. Sea $x = \dfrac{\theta}{4}$, y cuando $x \to 0$, $\theta \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\theta}{4}} = \lim_{\theta\to 0} 4\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 4\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 4\cdot 1 = 4$$

Problema 3-25 $\lim_{v \to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v - \dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Solución. Hagamos $x = v - \dfrac{\pi}{3}$, $v = x + \dfrac{\pi}{3}$, y cuando $v \to \dfrac{\pi}{3}$, $x \to 0$.

$$\lim_{v \to \pi/3} \frac{1 - \cos v}{\operatorname{sen}\left(v - \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + \sqrt{3}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \sqrt{3}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \lim_{x \to 0}\sqrt{3} = \operatorname{tg}\lim_{x \to 0}\frac{x}{2} + \sqrt{3} = \operatorname{tg} 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Problema 3-26 $\lim_{z \to 1} (1 - z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

Solución. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2} = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi z}{2}\right) = \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{2}(1 - z)$ y sea $1 - z = x$; entonces, cuando $z \to 1$, $x \to 0$ y

$$\lim_{z \to 1}(1 - z)\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x = \lim_{x \to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{x}} = \frac{2}{\pi}$$

Problema 3-27 *a)* $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\operatorname{arc\,sen} x}{3x}$

Solución. Sea $\operatorname{arc\,sen} x = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = x$ y cuando $x \to 0$, $\alpha \to 0$, así:

$$\lim_{x \to 0}\frac{2\operatorname{arc\,sen} x}{3x} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{2\alpha}{3\operatorname{sen}\alpha} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{2}{3\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}} = \frac{2}{3}$$

b) $\lim_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{2}$

c) $\lim_{x \to 1}\dfrac{\operatorname{sen}\pi x}{\operatorname{sen} 3\pi x}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{3}$

d) $\lim_{x \to a}\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$; aquí $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2\cos\dfrac{x + a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x - a}{2}$. *Resp.:* $\cos a$

e) $\lim_{x \to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x + 2}$. *Resp.:* π

Indicación. Sea $y = x + 2$, y cuando $x \to -2$, $y \to 0$.

Problema 3-28 Pruebe $\cos x \le \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \le \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Solución. Haciendo $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ vemos que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es convergente en $x_0 = 0$ con límite 1, porque $g(x)$ y $h(x)$ convergen en $x_0 = 0$ con límite 1.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos \lim_{x\to 0} x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

$f(x)$ está en sandwich entre $g(h)$ y $h(x)$.

Problema 3-29 Demuestre que

$$1 - \frac{x^2}{2!} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Solución. $1 - \dfrac{x^2}{2!} \le \cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \Leftrightarrow -\dfrac{x}{2!} \le \dfrac{\cos x - 1}{x} \le -\dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!}$

Haciendo $g(h) = -\dfrac{x}{2!}$ y $h(x) = -\dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!}$ vemos que $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$, en sandwich entre las funciones $g(x)$ y $h(x)$ que convergen en $x_0 = 0$ con límite 0, es convergente en $x_0 = 0$ con límite 0.

Problema 3-30 *a)* Demuestre que $\lim_{x\to\pi} (\pi - x) \cos \dfrac{1}{x} = 0.$

Solución. Como $\left|\cos \dfrac{1}{x}\right| \le 1$ para cualquier x, se tiene que $-(\pi - x) \le (\pi - x)\cos \dfrac{1}{x} \le (\pi - x)$.

Haciendo $g(x) = -(\pi - x)$ y $h(x) = \pi - x$ vemos que la función $f(x) = (\pi - x) \cos \dfrac{1}{x}$, en sandwich entre las funciones $g(x)$ y $h(x)$ convergentes en $x_0 = \pi$ con límite 0, es convergente en $x_0 = \pi$ con límite 0.

b) Demuestre que si el desarrollo en serie de tg x es

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{17x^7}{315} + \ldots \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

c) Demuestre que si el desarrollo en serie de ln cos es

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln \cos x = 0 \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Problema 3-31 Conociendo que los desarrollos en serie de arc sen x y sen x son

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)x^{2n-1}}{2\cdot 4\cdot 5 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = 1.$

Solución. De las series $\operatorname{sen} x \le \operatorname{arc\,sen} x \le x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} \Leftrightarrow$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} \le 1 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{3x^4}{2\cdot 4\cdot 5}$$

La función $\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$, en sandwich entre las funciones $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $1 + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{3x^4}{2\cdot 4\cdot 5}$ convergentes en $x_0 = 0$ con límite 1, es, por tanto, convergente en $x_0 = 0$ con límite 1.

Problema 3-32 Encuentre en cada uno de los casos que se dan a continuación un δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - x_0| < \delta$.

a) $f(x) = x^4$; $L = a^4 = x_0^4$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 1, L = 1$.

c) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 1, L = 2$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$; $x_0 = 0, L = 0$.

e) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $x_0 = 0, L = 0$.

f) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1, L = 1$.

Solución. *a)* Es posible encontrar δ comenzando con la ecuación

$$x^4 - x_0^4 = (x - x_0)(x^3 + x_0 x^2 + x_0^2 x + x_0^3)$$

Si $|x - x_0| < 1$, entonces $1 > |x - x_0| \geq |x| - |x_0|$ y de aquí $|x| < 1 + |x_0|$, de manera que

$$|x^3 + x_0x^2 + x_0^2x + x_0^3| \leq |x^3| + |x_0|\,|x|^2 + |x_0|^2\,|x| + |x_0|^3 < (1 + |x_0|)^3 + \\ + |x_0|(1 + |x_0|)^2 + |x_0|^2(1 + |x_0|) + |x_0|^3$$

y de allí se elige $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{(1 + |x_0|)^3 + |x_0|(1 + |x_0|)^2 + |x_0|^2(1 + |x_0|) + |x_0|^3}\right)$.

b) Sabemos que $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| \leq \dfrac{2}{|a|^2}|x - a|$ si $|x - a| < \dfrac{|a|}{2}$.

En nuestro caso, $a = x_0 = 1 = L$, y así $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| \leq 2|x - 1|$ si $|x - 1| < \dfrac{1}{2}$. Luego

$\delta = \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ sirve porque $\delta < \dfrac{1}{2}$ y $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - 1\right| \leq 2|x - 1| < \varepsilon$.

c) Hagamos $|f(x) - L| < \varepsilon$, o sea, $\left|x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon$:

$$\left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - 1\right) + (x^4 - 1)\right| \leq \left|\frac{1}{x} - 1\right| + |x^4 - 1|$$

Entonces $\qquad \left|x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon$ si $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|x^4 - 1| < \varepsilon/2$

Por *a)* $\qquad |x^4 - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $|x - 1| < \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{32}\right)$

y por *b)* $\qquad \left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ si $|x - 1| < \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$

luego si se elige $\delta = \min\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{32}, \dfrac{\varepsilon}{4}\right) = \min\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{32}\right)$ se asegura que si

$$0 < |x - 1| < \delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{32}\right) \Rightarrow \left|x^4 + \frac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon$$

d) Sea $\left|\dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} - 0\right| < \varepsilon$ y elijamos un δ tal que si $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} - 0\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} - 0\right| = \left|\frac{x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right| = \frac{|x|}{|1 + \operatorname{sen}^2 x|}$$

$|1 + \text{sen}^2 x| \le |1| + |\text{sen}^2 x| = |1| + |\text{sen}\, x|^2 \le 1 + 1 = 2$, ya que $|\text{sen}\, x| \le 1$, cualquiera que sea x.

Por tanto, $\dfrac{|x|}{|1 + \text{sen}^2 x|} \le \dfrac{|x|}{2} \le |x| < \delta$ porque $0 < |x - 0| < \delta \Leftrightarrow |x| < \delta$. Luego si elegimos $\delta = \varepsilon$, tenemos que

$$0 < |x - 0| < \delta = \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{1 + \text{sen}^2 x} - 0\right| = \frac{|x|}{|1 + \text{sen}^2 x|} < \varepsilon$$

e) Hagamos $\left|\sqrt{|x|} - 0\right| < \varepsilon$ y elijamos δ tal que $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{|x|} - 0\right| < \varepsilon$.

$$\left|\sqrt{|x|} - 0\right| = \left|\sqrt{|x|}\right| = \sqrt{|x|}$$

y $|x - 0| = |x| = \delta$; luego si hacemos $\delta = \varepsilon^2$, tenemos que $0 < |x| < \varepsilon^2 = \delta \Rightarrow 0 < \sqrt{|x|} < \varepsilon$ y así

$$0 < |x - 0| < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow \left|\sqrt{|x|} - 0\right| < \varepsilon$$

f) Si $\varepsilon > 1$, sea $\delta = 1$. Entonces $|x - 1| < \delta$, o sea, $|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$, y así $0 < \sqrt{x} < 2 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 1 < 1 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 1\right| < 1$.

Si $\varepsilon < 1$, entonces $(1 - \varepsilon)^2 < x < (1 + \varepsilon)^2 \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 1\right| < \varepsilon$, y es suficiente elegir δ de manera que $(1 - \varepsilon)^2 \le 1 - \delta$ y $1 + \delta \le (1 + \varepsilon)^2$. Así, podemos elegir $\delta = 2\varepsilon - \varepsilon^2$(* $|x - 1| < \delta \Rightarrow -\delta < x - 1 < \delta$).

Problema 3-33 Halle el $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{1 + x}$, n entero positivo y $|x| < 1$.

Solución. Como $1 - |x| \le \sqrt[n]{1 + x} \le 1 + |x|$ y como $\lim\limits_{x \to 0} (1 - |x|) = \lim\limits_{x \to 0} (1 + |x|) = 1$, entonces por el teorema del sandwich se obtiene que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{1 + x} = 1$.

Problema 3-34 Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$.

Solución. Si se multiplica el numerador y denominador por $(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2})$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}$$

Este problema también se puede resolver utilizando la sustitución $x = t^6$.

Problema 3-35 Pruebe que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$. ¿Es verdadero el recíproco?

Solución. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta$. Pero $\big||f(x)| - |L|\big| \le |f(x) - L|$. $\therefore$ $\big||f(x)| - |L|\big| < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$. El recíproco es falso, a menos que $L = 0$. Por ejemplo, si $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ -1, & x \text{ irracional} \end{cases}$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 1$ para todo x_0, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ puede que no exista para $\forall x$.

Problema 3-36 Muestre que la existencia del límite, $\lim [f(x) + g(x)]$, no implica la existencia de los límites $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Solución. Sea $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$, $g(x) = 1 - \text{sen}\,(1/x)$, $x \neq 0$; ninguna de las dos funciones tiene límite cuando x se aproxima a cero, pero $\lim [f(x) + g(x)] = 1$.

Problema 3-37 Muestre que si la condición $g(x) \neq a$ se elimina de un entorno de x_0 al cual no pertenece x_0, el teorema de las funciones compuestas no se verifica.

Solución. Sea $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = x \,\text{sen}\,(1/x)$, $x \neq 0$, $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ si $x \to 0$. La compuesta $f[g(x)] = g(x)$ en los puntos donde $g(x) \neq 0$ y 1 en los puntos $1/n\pi$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f[g(x)]$ no existe. ¿Por qué?

Problema 3-38 Muestre que esta función no tiene límite en $x_0 = 0$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$.

Solución. No tener g límite en x_0 equivale a que para cada L existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$; existe $x \in \mathcal{D}_g$, tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Si $x > 0$, $|x| = x$; por tanto, $g(x) = 1$ para $x > 0$.

Si $x < 0$, $|x| = -x$; por tanto, $g(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ para $x < 0$.

No existe L que verifique la definición porque no importa lo pequeño que se elija $\delta > 0$: existen valores de x en el intervalo $-\delta < x < \delta$, tales que $g(x) = 1$ y $g(x) = -1$. Los puntos $(x, g(x))$ de ambos tipos no pueden estar sobre la misma franja horizontal de anchura menor que 2; por tanto, si $\varepsilon \leq 1$, la banda horizontal determinada por las rectas $y = L \pm \varepsilon$ debe excluir por lo menos uno de los dos tipos de puntos. (Vea Fig. 3-24.)

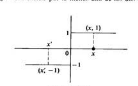


Figura 3-24

Solución analítica. Se debe mostrar que para cualquier número L, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x$ tal que $0 < |x| < \delta$, y $|g(x) - L| \geq \varepsilon$.

Se consideran dos casos: Caso 1. Si $L \geq 0$ tome $\varepsilon = 1$. Para cualquier $\delta > 0$ tome a x_1 de tal manera que $-\delta < x_1 < 0$. Entonces $|g(x_1) - L| = |-1 - L| = L + 1 \geq 1 = \varepsilon$.

Caso 2. Si $L < 0$ tome $\varepsilon = 1$. Para cualquier $\delta > 0$ tome a x_2 tal que $0 < x_2 < \delta$. Entonces $|g(x_2) - L| = 1 - L > 1 = \varepsilon$.

Problema 3-39 Muestre que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$.

Solución. Caso 1. $a = 0$. Se quiere mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\left|\sqrt[3]{x} - 0\right| = \left|\sqrt[3]{x}\right| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 0| = |x| < \delta$.

Ahora $\left|\sqrt[3]{x}\right| < \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon^3$. Entonces si $\delta = \varepsilon^2$, $\left|\sqrt[3]{x}\right| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 0| < \delta$.

Caso 2. $a \neq 0$. $\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \left|\frac{x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}}{x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}}\right| |x^{1/3} - a^{1/3}| = \frac{|x - a|}{|x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}|} =$
$= |g(x)|\,|x - a|$ con $g(x) = \frac{1}{|x^{2/3} + (xa)^{1/3} + a^{2/3}|}$.

Como $a \neq 0$, $\exists \eta$, $|x - a| < \eta$, entonces x y a tienen el mismo signo y $xa > 0$. Así, si $|x - a| < \eta$, $|g(x)| < a^{-2/3} \Rightarrow \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = |g(x)|\,|x - a| < a^{-2/3}\,|x - a| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$ y

$$\delta = \min\{\eta, \varepsilon a^{2/3}\} \quad \therefore \quad \lim_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$$

Problema 3-40 Si $|a| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$.

Solución. Si $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}|a| > 0$. Tomando a $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ se obtiene $|a| < \frac{1}{2}|a|$ o $\frac{1}{2}|a| \leq 0$. Lo cual es una contradicción.

Problema 3-41 Sea f definida en $[-1, 0[\cup]0, 1]$ por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 0 \\ 1 - x \text{ si } x > 0 \end{cases}$
Muestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Solución. Sin perder generalidad se puede considerar $0 < \varepsilon < 1$. Se debe mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$|(x^2 + 1) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon$ para todo x tal que $-\delta < x < 0$ (1)
$|(1 - x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon$ para todo x tal que $0 < x < \delta$ (2)

Si $\delta = \varepsilon$, (2) es trivial. También si $0 < -x < \delta = \varepsilon < 1 \Rightarrow x^2 < \varepsilon^2 < \varepsilon$; por tanto, (1) se cumple. De donde $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Problema 3-42 Sea $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Muestre que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

Solución. Suponga que $\lim_{x \to 1} f(x) = L$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ para $x \in]1 - \delta, 1 + \delta[$. En particular se puede hallar x_1 y x_2 en $]1 - \delta, 1 + \delta[$ tales que $x_1 < 1 < x_2$, y $|x_1 - L| < 1$ y $|2x_2 + 1 - L| < 1$.

Esto significa que $L < 1 + x_1 < 2$ y $2 < 2x_2 < L$. De donde se concluye que L no existe.

Problema 3-43 (Unicidad del límite.) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

También, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Como x_0 es un punto de acumulación de $\mathscr{D}_f$, f está definida en algún punto $x_1 \neq x_0$ del intervalo $]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$. Entonces, si $\varepsilon = |L_1 - L_2|$

$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_1) + f(x_1) - L_2| \leq |L_1 - f(x_1)| + |f(x_1) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = L_1 = L_2$

Entonces, $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$, contradicción. $\therefore L_1 = L_2$.

Problema 3-44 Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $a < L < b \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $a < f(x) < b$, para todo x en el dominio de f que satisfaga $0 < |x - x_0| < \delta$. (Vea Fig. 3-25.)

Solución. Tome $\varepsilon = \min\{b - L, L - a\}$, entonces

$$a \leq L - \varepsilon < L + \varepsilon \leq b \tag{1}$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, correspondiente a cada ε, $\exists \delta > 0$ tal que para $\forall x \in \mathscr{D}_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene $a \leq L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \leq b$ $\quad \therefore \; a < f(x) < b$.

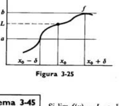


Figura 3-25

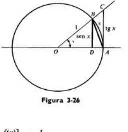


Figura 3-26

Problema 3-45 Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [-f(x)] = -L$.

Solución. Para algún $\varepsilon > 0$ se tiene que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Multiplicando la segunda desigualdad por (-1) se obtiene

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow -L + \varepsilon > -f(x) > -L - \varepsilon \Leftrightarrow -L - \varepsilon < -f(x) < -L + \varepsilon$$

es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} [-f(x)] = -L$.

Problema 3-46 Pruebe que $\lim\limits_{x \to x_0} (\text{sen } x)/x = 1$. (Vea Fig. 3-26.)

Solución. (1) $\cos x < \text{sen } x/x < 1$ en $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ porque:

área del triángulo OAB < área del sector OAB < área del triángulo OAC si $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Entonces $\frac{1}{2}$ sen $x < x/2 < \text{tg } x/2$. Además, $\text{sen } x < x < \text{tg } x \Rightarrow 1 < x/\text{sen } x < 1/\cos x$ al dividir por sen x; al invertir se obtiene $1 > \text{sen } x/x > \cos x$.

La desigualdad también se verifica en $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. La relación (1) da

$$0 < 1 - \text{sen } x/x < 1 - \cos x = 2 \text{ sen } x/2 \leq 2\,|\text{sen } x/2| \leq 2\,|x|/2 = |x| \text{ si } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

Dado cualquier $\varepsilon > 0$ se elige $\delta = \frac{\pi}{2}$ si $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ y $\delta = \varepsilon$ si $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

Entonces $0 < |x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |1 - \text{sen } x/x| < \varepsilon$ $\quad \therefore \; \lim\limits_{x \to 0} (\text{sen } x/x) = 1$.

Problema 3-47 Si $f(x)$ es acotada en un entorno de x_0 al cual no pertenece x_0 y si $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)\,\alpha(x)] = 0$.

Solución. En otras palabras, multiplicar una función que se aproxima a cero por otra función que no es «muy grande» no puede evitar que la primera función se aproxime a cero.

Por hipótesis, existen números $M > 0$ y $\delta_1 > 0$ tales que $|f(x)| \leq M$ si $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Además, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$ si $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, se elige a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ para tener que $|f(x)\,\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$ para todo x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Pero esto es precisamente $\lim_{x \to x_0} [f(x)\,\alpha(x)] = 0$.

Problema 3-48 Demuestre el teorema fundamental del álgebra de límites utilizando el concepto de entorno.

Solución. Vamos a mostrar que $\lim_{x \to x_0} [(fx) + g(x)] = A + B$.

Suponga que $\varepsilon > 0$ es dado. Entonces se quiere hallar un entorno $V^*(x_0)$ tal que

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon \text{ cuando } x \in V^*(x_0)$$

Como

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| = |f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \tag{1}$$

Además, $\varepsilon/2$ es positivo y $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists$ un entorno $V_1^*(x_0)$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon/2$ cuando $x \in V_1^*(x_0)$.

De la misma manera, existe un entorno

$$V_2^*(x_0) \text{ tal que } |g(x) - B| < \varepsilon/2 \text{ cuando } x \in V_2^*(x_0) \tag{2}$$

Sea $V^*(x_0) = V_1^*(x_0) \cap V_2^*(x_0)$; esto implica que las desigualdades (1) y (2) se cumplen cuando $x \in V^*(x_0)$, y, por tanto, $|f(x) + g(x) - (A + B)|$ también se verifica porque $|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Nota. Complete la demostración de este teorema.

LIMITES LATERALES

Cuando se consideró el $\lim_{x \to x_0} f(x)$, los valores de x se toman lo suficientemente cercanos a x_0 y los valores de x pueden ser mayores o menores que x_0. En algunos casos la variable x se restringe a que tome valores mayores que x_0; en este caso decimos que x se aproxima a x_0 por la derecha y se escribe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y se llama límite lateral por la derecha.

Definición. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ equivale a que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < x - a < \delta$.

Definición. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ equivale a que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $-\delta < x - a < 0$.

Observe que en las definiciones no interviene la función valor absoluto en $x - a$, debido a que en el primer caso $x > x_0$ y en el segundo $x < x_0$.

Teorema. El límite ordinario $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si, y solamente si, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x)$ son iguales.

Demostración. Observe que $f(x)$ está definida en un entorno de x_0 al cual no pertenece x_0 si, y solamente si, $f(x)$ está definida en dos intervalos de la forma $]x_0 - h, x_0[$ y $]x_0, x_0 + h[$.

Suponga que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todos los x tales que $0 < |x - x_0| < \delta$, y, por tanto, para todos los x que $0 < x - x_0 < \delta$ o $0 < x_0 - x < \delta$.

Es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Recíprocamente, suponga que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x tal que $0 < x_0 - x < \delta$ o $0 < x_0 - x < \delta$, es decir, para todo x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Lo cual dice que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a L.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-49 Sea $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Halle el limite de la función en $x_0 = 0$ si existe.

Solución. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

Por el teorema anterior esto muestra que el límite ordinario existe en $x_0 = 0$.

Problema 3-50 Vea si $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$ existe.

Solución. Sea $x \to 0^-$, entonces $2^{1/x} \to 0$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}} = 1/3$.

Sea $x \to 0^+$; para $x \neq 0$, $\dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}} = \dfrac{2^{-1/x} + 1}{3 \cdot 2^{-1/x} + 1}$, y como $\lim_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x} + 1}{3 \cdot 2^{-1/x} + 1} = 1$.

Por tanto, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$ no existe.

Problema 3-51 ¿Existen los siguientes limites para cualquier entero n? $[x]$ es la función parte entera de x. $\lim_{x\to n^-} [x]$ y $\lim_{x\to n^+} [x]$. (Vea Fig. 3-27.)

Solución. Para $x \in [n - 1, n]$, $[x] = n - 1$; $\lim_{x\to n^-} [x] = n - 1$ si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $|[x] - (n - 1)| < \varepsilon$ cuando $x \in]-\infty, n[$ y $0 < |x - n| < \delta$.

Es decir, cuando $0 < n - x < \delta \Leftrightarrow n - \delta < x < n$. Si $\delta \leq 1$, entonces $x \in [n - \delta, n[\subset [n - 1, n[$ y $|[x] - (n - 1)| = |(n - 1) - (n - 1)| = 0 < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$. Entonces

$$\lim_{x\to n^-} [x] = n - 1$$

En forma análoga se muestra que $\lim_{x\to n^+} [x] = n \neq n - 1$.

Esto muestra que $\lim_{x\to n} [x]$ no existe.

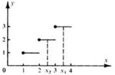


Figura 3-27

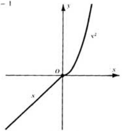


Figura 3-28

Problema 3-52 Halle el limite de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ cuando x tiende a cero. (Vea Figura 3-28.)

Solución. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, porque $\forall\varepsilon > 0$, $|x^2 - 0| = |x^2| < \varepsilon$ cuando $0 < x - 0 = x < \delta$ si $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Además, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$ porque $\forall\varepsilon > 0$, $|x - 0| = |x| = -x < \varepsilon$ cuando $0 < 0 - x = -x < \delta$ si $\delta = \varepsilon$.

Entonces, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe y es igual a 0.

Problema 3-53 Halle $\lim_{x \to 2} f(x)$ si existe de $f(x) = \begin{cases} -x + 2, x \in]-\infty, 2] \\ (x-2)^2, x \in]2, \infty[\end{cases}$

Solución. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x + 2) = 0$, porque si se toma $\varepsilon > 0$, entonces $|-x + 2 - 0| = |2 - x| < \varepsilon$ cuando $0 < 2 - x < \delta = \varepsilon$.

En forma análoga, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 2)^2 = 0$, porque para $\varepsilon > 0$, $|(x - 2)^2 - 0| = (x - 2)^2 < \varepsilon$ cuando $0 < x - 2 < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. Esto muestra que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe y es igual a 0.

Problema 3-54 Pruebe que la suma de dos funciones, cada una con un límite lateral en x_0, no necesariamente tienen un límite lateral en x_0.

Solución. Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Entonces, $f(x)$ tiene un límite lateral por la izquierda en $x_0 = 0$ y $g(x)$ un límite lateral por la derecha en $x_0 = 0$; pero $f(x) + g(x)$ no tienen un límite lateral en $x_0 = 0$.

Problema 3-55 Suponga que las funciones f y g tienen las siguientes propiedades para todo $\varepsilon > 0$ y todo x:

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, \text{ entonces } |f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \varepsilon^2, \text{ entonces } |g(x) - 4| < \varepsilon$$

Para cada $\varepsilon > 0$ encuentre un $\delta > 0$ tal que para todo x:

a) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) + g(x) - 6| < \varepsilon$.

b) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - 8| < \varepsilon$.

c) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

d) Si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Solución. *a)* $|f(x) + g(x) - 6| = |[f(x) - 2] + [g(x) - 4]| \leq |f(x) - 2| + |g(x) - 4|$. Por tanto, necesitamos $|f(x) - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - 4| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|f(x) - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < |x - 2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|g(x) - 4| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

remplazando $\frac{\varepsilon}{2}$ por el ε de la hipótesis.

Si se elige $0 < |x - 2| < \min\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right) + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{4}\right] = \delta$ se asegura que

$$|f(x) - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |g(x) - 4| < \frac{\varepsilon}{2}$$

b) $|f(x)g(x) - 8| = |f(x)g(x) - 2 \cdot 4| \leq (1 + |2|)\,|g(x) - 4| + |4|\,|f(x) - 2|$ si $|f(x) - 2| < 1$.
Necesitamos $|f(x) - 2| < \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2(|4| + 1)}\right)$ y $|g(x) - 4| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |2|)}$ y esto se cumple eligiendo

$$0 < |x - 2| < \min\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\left[\min\left(1, \frac{\varepsilon}{10}\right)\right]^2}{9}\right) + \min\left(1, \frac{\varepsilon}{10}\right), \left[\min\left(1, \frac{\varepsilon}{6}\right)\right]^2\right) = \delta$$

c)
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{2}{|4|^2}\,|g(x) - 4| \text{ si } |g(x) - 4| < \frac{|4|}{2}$$

Necesitamos hacer $|g(x) - 4| < \min\left(\dfrac{|4|}{2}, \dfrac{\varepsilon|4|^2}{2}\right)$ y esto se cumple si

$$0 < |x - 2| < [\min(2, 8\varepsilon)]^2 = \delta$$

d) 1. $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{2}{4}\right| \leq \dfrac{2|2|}{|4|^2}\,|g(x) - 4| + \dfrac{2}{|4|}\,|f(x) - 2|$ si $|g(x) - 4| < \dfrac{|4|}{2}$.
Necesitamos, por tanto, $|g(x) - 4| < \min\left(\dfrac{|4|}{2}, \dfrac{\varepsilon|4|^2}{4|2|}\right)$ y $|f(x) - 2| < \dfrac{|4|\varepsilon}{4}$, y esto se cumple si

$$0 < |x - 2| < \min\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, [\min(2, 2\varepsilon)]^2\right) = \delta$$

2. Trabajando con $f(x) = x$, $\dfrac{1}{g(x)} = y$, $a = 2$, $b = \dfrac{1}{4}$ en la fórmula

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{2}{4}\right| \leq (1 + |2|)\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|\,|f(x) - 2| \text{ si } |f(x) - 2| < 1$$

Necesitamos $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |2|)}$ y $|f(x) - 2| < \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2\left|\frac{1}{4}\right|}\right)$, lo cual se cumple si

$$0 < |x - 2| < \min\left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\left[\min\left(1, \frac{2\varepsilon}{5}\right)\right]^2}{9}\right) + \min\left(1 + \frac{2\varepsilon}{5}\right), \left[\min\left(2, \frac{8\varepsilon}{2(|2| + 1)}\right)\right]^2\right) = \delta$$

Problema 3-56 Establezca un criterio para que una función $f(x)$ no se aproxime al límite L cuando $x \to x_0$.

Solución. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que dado cualquier $\delta > 0$ hay un x que satisface las desigualdades $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Problema 3-57 Pruebe que una función no negativa no puede tener un límite negativo en algún punto.

Solución. Supongamos lo contrario, o sea, que si existe ese límite para un punto x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c < 0$$

donde $f(x) \geq 0$. Entonces debería haber un δ tal que $|f(x) - c| < -c$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$. Pero esto es imposible, porque $f(x) \geq 0$, $c < 0 \Rightarrow |f(x) - c| > -c$. Una contradicción, porque $|f(x) - c|$ no puede ser al tiempo $< -c$ y $> -c$.

Problema 3-58 Pruebe que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe.

Solución. Cuando x se aproxima al origen la función sen $(1/x)$ sufre más y más oscilaciones entre los valores -1 y $+1$, y la distancia entre los cortes sucesivos del eje X se hace cada vez más pequeña (vea Fig. 3-29). La función sen $(1/x)$, por tanto, no está definida en $x = 0$, donde su argumento se reduce a la expresión sin sentido 1/0. Es difícil imaginar que sen $(1/x)$ permanezca próximo a algún número para valores de x próximos a cero, porque no hay un entorno reducido de $x = 0$ en el cual la función deje de sufrir una oscilación completa (en realidad, infinitas oscilaciones). Así, la intuición sugiere fuertemente que el límite no existe.

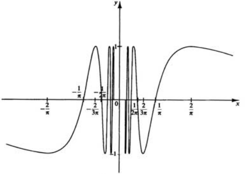


Figura 3-29

Para probar esta afirmación supongamos que sen $(1/x)$ tiene un límite c en el punto $x = 0$. Entonces, eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ podemos encontrar un δ tal que $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x} - c\right| < \frac{1}{2}$. Pero para un entero n de un valor absoluto muy grande, ambos puntos

$$x_1 = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi}$$

pertenecen al entorno reducido $0 < |x| < \delta$, y

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x_1} = \operatorname{sen}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x_2} = \operatorname{sen}\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Por tanto,

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x_1} - c\right| = |1 - c| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x_2} - c\right| = |1 + c| < \frac{1}{2}$$

y de aquí $2 = |1 - c + 1 + c| \le |1 - c| + |1 + c| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, o sea, $2 < 1$, lo que es absurdo. Esta contradicción demuestra que sen $(1/x)$ no puede tener un límite en $x = 0$.

Problema 3-59 No debe pensarse que son justamente las oscilaciones de la función sen $(1/x)$ las que evitan que ella tenga un límite en $x = 0$. Más bien es el hecho de que, gracias a las oscilaciones en este caso, sen $(1/x)$ toma los mismos dos valores diferentes en cada entorno reducido de $x = 0$. De otra parte, la función

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ (x \neq 0)$$

tiene muchas oscilaciones cerca de $x = 0$ como sen $(1/x)$, pero ahora estas oscilaciones son «amortiguadas» por el factor x. Como resultado, dado cualquier $\varepsilon > 0$, necesitamos solamente elegir $\delta = \varepsilon$. Entonces

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

y, por tanto,

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

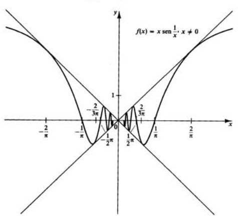


Figura 3-30

Problema 3-60 Una función que no oscila puede no tener un límite en un punto si toma los mismos dos valores diferentes en cada entorno del punto. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

no tiene límite en $x = 0$, por el mismo razonamiento del Problema 3-63 para probar que sen $(1/x)$ no tiene límite en $x = 0$. (Cada entorno reducido de $x = 0$ obviamente contiene puntos x_1, x_2 tales que $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$.) Sin embargo, el comportamiento de $f(x)$ en la proximidad de $x = 0$ se observa mejor en este sentido: sen $(1/x)$ deja de tener un límite aun si el punto x se restringe a un lado del origen, mientras $|x|/x$ tiene un límite bajo estas condiciones porque

se reduce a una constante en uno u otro lado de $x = 0$. Por eso se ha dibujado el grafo con dos flechas (Fig. 3-31): una señalando el «límite lateral por la derecha», $+1$, y la otra el «límite lateral por la izquierda», -1.

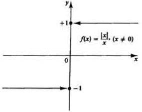


Figura 3-31

Problema 3-61 Dé un ejemplo de una función f para la cual la siguiente afirmación es falsa: Si $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ cuando $0 < < |x - a| < \frac{\delta}{2}$.

Solución. Sea $f(x) = \sqrt{|x|}$ con $a = 0$ y $L = 0$. Entonces para $\varepsilon > 1$ tenemos $\left|\sqrt{|x|} - 0\right| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - 0| < \varepsilon^2$; pero si $0 < |x - 0| < \frac{\varepsilon^2}{2}$, no se sigue que $\left|\sqrt{|x|} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$; para que esto ocurra debe tenerse $0 < |x - 0| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$

Problema 3-62 *a*) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen, ¿puede existir $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ o $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$?

b) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ existe, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

c) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe, ¿puede existir $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$?

d) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ existe, ¿se sigue que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe?

Solución. *a*) Sí. Por ejemplo, si $g = 1 - f$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} [f(x) + 1 - f(x)] = 1$ aun si $\lim_{x\to a} f(x)$ [y, por tanto, $\lim_{x\to a} g(x)$] no existe; y si $g = \frac{1}{f}$, donde $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot 1}{f(x)} = 1$ existe aun si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existen (por ejemplo, si $f(x) = 1/(x - a)$ para todo $x \neq a$ y $g(x) = x - a$).

b) Sí, porque $g = (f + g) - f$.

c) No. [Esto es otra manera de establecer la parte *b*)].

d) No. El razonamiento análogo a la parte *b*) de que $g = \frac{(f \cdot g)}{f}$ no operaría si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, y éste es precisamente el caso en que uno puede encontrar un contraejemplo. Por ejemplo, sea $f(x) = x - a$, y sea $g(x) = 0$ para x racional y $g(x) = 1$ para x irracional. Entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe; pero $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$ porque $|f(x)g(x) - 0| \leq |f(x)|$.

Problema 3-63 Pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$. (Este es un ejercicio que ayuda a entender lo que significan los términos.)

Solución. Sea $L = \lim_{x\to a} f(x)$ y definamos $g(h) = f(a+h)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que para todo x si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ahora, si $0 < |h| < \delta$, entonces $0 < |(h+a) - a| < \delta$, y, por tanto, $|f(a+h) - L| < \varepsilon$. Esta desigualdad puede escribirse $|g(h) - L| < \varepsilon$. En consecuencia, $\lim_{h\to 0} g(h) = L$, lo cual también puede escribirse $\lim_{h\to 0} f(a+h) = L$.

La misma clase de razonamientos muestra que si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = m$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = m$. Así, un límite existe si existe el otro, y viceversa, y en este caso son iguales.

Problema 3-64 * *a*) Pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y solo si, $\lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0$. (Primero vea por qué la proposición es obvia; luego dé una prueba rigurosa.)

b) Pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x-a)$.

c) Pruebe que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

d) Pruebe un ejemplo donde $\lim_{x\to 0}$ exista, pero $\lim_{x\to 0} f(x)$ no.

Solución. *a*) Intuitivamente, podemos obtener $f(x)$ tan próximo a L como queramos si, y solo si, podemos obtener $f(x) - L$ tan próximo a cero como queramos. La demostración es tan simple que ni vale la pena tenerla por tal. Para ser precisos, supongamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y sea $g(x) = f(x) - L$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esta última desigualdad puede escribirse $|g(x) - 0| < \varepsilon$, y así $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

El razonamiento en la otra dirección es igualmente muy simple.

b) Intuitivamente, que x se aproxime a a es lo mismo que $x - a$ se aproxime a 0. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y sea $g(y) = f(x-a)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ahora, si $0 < |y| < \delta$, entonces $0 < |(y+a) - a| < \delta$, y así $|f(y+a) - L| < \varepsilon$. Pero esta última desigualdad puede escribirse $|g(y) - L| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{y\to 0} g(y) = L$. El razonamiento en dirección inversa es similar.

c) Intuitivamente, x está próximo a 0 si, y solo si, x^3 lo está. Sea $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. Para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Entonces, si $0 < |x| < \min(1, \delta)$, tendremos $0 < |x^3| < \delta$, y, por tanto, $|f(x^3) - L| < \varepsilon$. Luego $\lim_{x\to 0} f(x^3) = L$. De otra parte, si asumimos que $\lim_{x\to 0} f(x^3)$ existe, es decir, $\lim_{x\to 0} f(x^3) = m$; entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x^3) - m| < \varepsilon$. Entonces si $0 < |x| < \delta^3$ tenemos $0 < \left|\sqrt[3]{x}\right| < \delta$, y así $\left|f([\sqrt[3]{x}]^3) - m\right| < \varepsilon$, o $|f(x) - m| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = m$.

d) Sea $f(x) = 1$ para $x \geq 0$, y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1$, pero $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Problema 3-65 * Suponga que hay un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x-a| < \delta$. Pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. En otras palabras, $\lim_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de $f(x)$ para x próximos a a —este hecho se expresa a veces diciendo que los límites son una «propiedad local»—. (Ayudará usar δ' o alguna letra, en lugar de δ, en la definición de límites.)

* *Nota importante.* Uno, dos o tres asteriscos al comenzar el problema indican el grado de dificultad del mismo.

Solución. Intuitivamente esto es verdad porque solamente tenemos que considerar las x que satisfagan $0 < |x - a| < \delta'$, donde podemos elegir $\delta' < \delta$. En efecto, si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\varepsilon > 0$, hay un δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ahora bien, hay también un $\delta' < \delta$ con esta propiedad [nominalmente, min (δ', δ)]. Porque $f(x) = g(x)$ para todo x con $0 < |x - a| < \delta$, tenemos también que $f(x) = g(x)$ para todo x con $0 < |x - a| < \delta'$, y la conclusión $|f(x) - L| < \varepsilon$ puede, asimismo, escribirse $|g(x) - L| < \varepsilon$. Esto muestra que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

LIMITES QUE CONTIENEN INFINITO

Infinito (∞) no es un número real. El símbolo ∞ es de carácter posicional, no es algebraico ni aritmético.

Se puede formar un nuevo sistema numérico construido por los reales y los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Se llama el sistema ampliado de los números reales y debe cumplir con las siguientes reglas:

$$a + (+\infty) = +\infty;\; a - (+\infty) = -\infty;\; a \cdot (+\infty) = +\infty \text{ si } a > 0;$$
$$a \cdot (+\infty) = -\infty \text{ si } a < 0;\; (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty;\; (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Las operaciones del tipo $+\infty + (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$ o $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ no se permiten porque no se las pueden asignar valores únicos.

Ahora considere la función $f(x) = 1/x^2$, $\forall x \neq 0$. La Figura 3-32 muestra que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Suponga que se da M. El diagrama muestra el entorno de 0 que se necesita para que $f(x) > M$.

En efecto, $1/\delta^2 = M \Rightarrow \delta = 1/\sqrt{M}$. Se puede tomar a $\delta \geq 1/\sqrt{M}$ si $x \in V_\delta^*(0) \Rightarrow f(x) > M$.

Este grafo nos ayuda a intuir algunas de las siguientes definiciones, en las cuales el punto límite es infinito o x_0.

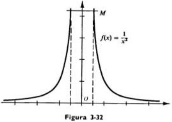


Figura 3-32

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

3. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow x_0 - \delta_f < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

4. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow |x| > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

5. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ si para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar un número positivo M tal que si $x > M$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tal que si $x < -M \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

7. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ si para $\forall M > 0$ se puede hallar un número positivo δ tal que si $x \in V_\delta^*(x_0)$ entonces $f(x) > M$.

8. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ si para $\forall M > 0$ se puede hallar un número positivo δ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) > M$.

9. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ si para $\forall M > 0$ se puede hallar un número positivo δ tal que $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $f(x) > M$.

10. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $x > N \Rightarrow |f(x)| < N$.

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que si $x > N \Rightarrow f(x) > N$.

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ si $\forall M > 0$ se puede hallar $N > 0$ tal que si $x < -N \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > M$.

También se definen otros límites que contienen infinito si $x_0^+, x_0^-, \infty, +\infty, -\infty$, se representan por $\square$. Así, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \square} (-f) = +\infty$ según 7 a 12. Se deja como ejercicios definir los demás casos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-66 *a*) La función $f(x) = 1/x, x \neq 0$ se aproxima a ∞ si $x \to 0$; *b*) $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$.

Solución. *a*) En efecto, para un $M > 0$ dado se elige $\delta = 1/M$. Entonces $0 < |x| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = M$$

b) Como $|x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |1/x| < \varepsilon$. Entonces basta tomar $M = 1/\delta$.

Problema 3-67 Si r es un entero positivo, entonces: *a*) $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x^r = 0$; *b*) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1/x^r = 0$.

Solución. *a*) Se debe mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$ cuando $|x| > M \Leftrightarrow |x^r| > \frac{1}{\varepsilon}$ cuando $|x| > M \Leftrightarrow$ porque $r > 0$, $|r| > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/r}$ cuando $|x| > M$.

Para que se verifique se debe tomar a $M = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/r}$. Así podemos concluir que

$$\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon \text{ cuando } |x| > M \text{ si } M = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/r}$$

La demostración de *b*) es análoga.

Problema 3-68 Muestre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, x \neq 0$.

Solución. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$ elija a $M = 1/\varepsilon$. Entonces $x > M$, lo cual implica que

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

Análogamente, $f(x) \to 1$ si $x \to -\infty$, porque $x < -M$ implica que $|f(x) - 1| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$.

Problema 3-69 Si $x \to +\infty$, la función $f(x) = 1/(x^2 - 1)$, $x \neq \pm 1$ se aproxima a cero.

Solución. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$ elija a $M = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\varepsilon}}$. Entonces:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - 0| = \frac{1}{|x^2 - 1|} = \frac{1}{x^2 - 1} < \frac{1}{M^2 - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \varepsilon$$

Problema 3-70 Muestre que los límites $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sen} x$ no existen.

Solución. Suponga que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} = L$. Elija a $\varepsilon = 1/2$; se puede hallar $M > 0$ tal que $x > M$ implique que $|\operatorname{sen} x - L| < \dfrac{1}{2}$.

Para n suficientemente grande, los puntos $x_1 = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $x_2 = \left(2n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ están en $]-\infty, M[$ y $\operatorname{sen} x_1 = 1$, $\operatorname{sen} x_2 = 1$. Además

$$|\operatorname{sen} x_1 - L| = |1 - L| < \frac{1}{2}$$

$$|\operatorname{sen} x_2 - L| = |1 + L| < \frac{1}{2}$$

Entonces, $2 = |1 - L + 1 + L| \leq |1 - L| + |1 + L| < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, lo cual es absurdo. Esta contradicción muestra que sen x no tiene límite si $x \to +\infty$. La otra demostración es análoga.

Problema 3-71 Si $x \to +\infty$ la función $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x}$, $x \neq 0$ se aproxima a $-\infty$.

Solución. En efecto, dado cualquier $M > 0$ elija a $M' = \max\{M, 1\} + 1$, $(M' \geq 1)$. Entonces, $x > M'$ implica que

$$\frac{2 - x^2}{x} = \frac{2}{x} - x < 1 - x < -(M' - 1) = \begin{cases} -1 & \text{si } M < 1 \\ -M & \text{si } M \geq 1 \end{cases}$$

Así, en cualquier caso, $x > M' \Rightarrow f(x) < -M$.

Problema 3-72 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si, y solamente si, $\lim\limits_{\xi \to 0^+} f^*(\xi) = L$, $f^*(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$. Análogamente, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si, y solamente si, $\lim\limits_{\xi \to 0^-} f^*(\xi) = L$.

Solución. Considere el caso $x \to +\infty$. Si $L \neq \infty, \pm\infty$ entonces dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $x > M$.

Pero $|f(x) - L| = \left|f\left(\dfrac{1/1}{x}\right) - L\right| = \left|f^*\left(\dfrac{1}{x}\right) - L\right| = |f^*(\xi) - L|$ en términos de la variable $\xi = \dfrac{1}{x}$.

Eligiendo $\delta = 1/M$ se ve que $0 < \xi < \delta \Rightarrow x > M$ y, por tanto, $|f^*(\xi) - L| < \varepsilon$. Como ε es arbitrario, entonces $f^*(\xi) \to L$ si $\xi \to 0^+$. Si $L = +\infty$, entonces dado cualquier $M > 0$ existe M' tal que $f(x) > M$ si $x > M'$.

Por tanto, en términos de ξ, se tiene que $f^*(\xi) > M$ si $0 < \xi < \delta = 1/M'$. Luego $f^*(\xi) \to +\infty$ si $\xi \to 0^+$. Los casos restantes se manejan de la misma manera: $(L = \infty, L = -\infty, x \to -\infty)$.

Problema 3-73 Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$.

Solución. Según el problema anterior, $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) =$

$$= \lim_{\xi \to 0^-} \left(\sqrt{\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} - 1} - \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} + 1} \right) = \lim_{\xi \to 0^-} \frac{1}{\xi} \left(\sqrt{1 + \xi - \xi^2} - \sqrt{1 - \xi + \xi^2} \right) =$$

$$= \lim_{\xi \to 0^-} \frac{(\sqrt{1 + \xi - \xi^2} - \sqrt{1 - \xi - \xi^2})(\sqrt{1 + \xi - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi + \xi^2})}{\xi(\sqrt{1 + \xi - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi + \xi^2})} =$$

$$= \lim_{\xi \to 0^-} \frac{(1 + \xi - \xi^2) - (1 - \xi + \xi^2)}{\xi(\sqrt{1 + \xi - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi + \xi^2})} = \frac{\lim_{\xi \to 0^-} (2 - 2\xi)}{\lim_{\xi \to 0^-} (\sqrt{1 + \xi - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi + \xi^2})} = \frac{2}{2} = 1$$

Problema 3-74 Pruebe que $\lim_{x \to +\infty} (\text{sen } \sqrt{x + 1} - \text{sen } \sqrt{x}) = 0$.

Solución. Por trigonometría se sabe que $\text{sen}\sqrt{x+1} - \text{sen}\sqrt{x} = 2 \text{ sen } \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$

Además, $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{1 + x} - \sqrt{x})(\sqrt{1 + x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} =$

$$= \lim_{\xi \to 0^+} \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1 + \xi + 1}} = 0$$

Por tanto, si se hace $t = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$, entonces $\lim_{x \to +\infty} (\text{sen}\sqrt{x + 1} - \text{sen}\sqrt{x}) = \lim_{t \to 0} 2 \text{ sen } (t/2) \cdot \cos 1/2t = 0$ y $\cos 1/2t$ es acotada en un entorno de 0.

Problema 3-75 Muestre que $\lim_{x \to 2} \frac{x - 4}{(x - 2)^2} = -\infty$.

Solución. Sea $M > 0$. Si $|x - 2| < 1 \Rightarrow -3 < x - 4 < -1$ y $\frac{x - 4}{(x - 2)^2} < \frac{-1}{(x - 2)^2}$. Ahora, si $|x - 2| < 1/\sqrt{M}$, entonces $-\frac{1}{(x - 2)^2} < -M$. Entonces, si $\delta = \min \{1, 1/\sqrt{M}\}$ las dos desigualdades anteriores se verifican y $\frac{x - 4}{(x - 2)^2} < \frac{-1}{(x - 2)^2} < -M$ cuando $0 < |x - 2| < \delta$, es decir, $\lim_{x \to 2} \frac{x - 4}{(x - 2)^2} = -\infty$.

Problema 3-76 ¿Qué límite tiene la función $1/(x^2 - 4)$ en $x = 2$?

Solución. Para x próximo a 2 menor que 2, $\frac{1}{x^2 - 4}$ es positivo. Para x próximo a 2 y mayor que 2, $\frac{1}{x^2 - 4}$ es negativo; esto nos dice que $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 - 4}$ no existe.

1. Sea $M > 0$. Si $0 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1/5 < 1/x + 2 < 1/4$ y $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)} > \frac{1}{5(x - 2)}$. Ahora, si $0 < x - 2 < 1/5M \Rightarrow \frac{1}{5(x - 2)} > M$. Por tanto, si $\delta = \min \{1, 1/5M\}$, las dos desigualdades anteriores se verifican y $\frac{1}{x^2 - 4} > \frac{1}{5(x - 2)} > M$ cuando $0 < x - 2 < \delta$. Es decir, $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty$.

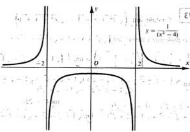


Figura 3-33

2. Sea $M > 0$. Si $-1 < x - 2 < 0 \Rightarrow 1/4 < 1/x + 2 < 1/3$ y $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{1}{4(x - 2)}$. Si $-\frac{1}{4M} < x - 2 < 0$, entonces $\frac{1}{4(x - 2)} < M$. Tomando a $\delta = \min\{1, 1/4M\}$ las dos desigualdades anteriores se verifican y $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{1}{4(x - 2)} < -M$ cuando $-\delta < x - 2 < 0$. Es decir, $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$.

Problema 3-77 Muestre que $\lim_{x \to \infty} x^{-n} = 0$, n entero positivo.

Solución. $\forall n \geq 1$ y $\forall x \geq 1$, $0 < 1/x^n \leq 1/x$, entonces $|1/x^n - 0| \leq |1/x - 0| = 1/x$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ahora $|1/x - 0| = 1/x < \varepsilon$ cuando $x > 1/\varepsilon$. Entonces se elige $N = \max\{1, 1/\varepsilon\}$, y para $x > N$, $|1/x^n - 0| \leq |1/x - 0| < \varepsilon$, es decir, $\lim_{x \to \infty} x^{-n} = 0$, $\forall n \geq 1$.

Problema 3-78 Muestre que $\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Solución. Recuerde la siguiente definición: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para cada $M > 0$ existe N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Considere el caso en que $a > 0$; entonces $ax^n > ax$, $\forall n \geq 1$ y $\forall x \geq 1$.

Sea $M > 0$. Entonces $ax > M$ cuando $x > M/a$. Entonces si $N = \max\{1, M/a\}$, para $x > N$, $ax^n \geq ax > M$, es decir, $\lim_{x \to \infty} ax^n = \infty$.

Problema 3-79 La función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $(x \neq \pm 1)$ se aproxima a ∞ si $x \to 1$.

Solución. Dado cualquier $N > 0$ elija $\delta = \min\{1/3N, 1\}$. Entonces:

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow 1 < x + 1 < 3 \text{ y } |f(x)| = \left|\frac{1}{x^2 - 1}\right| = \frac{1}{|(x + 1)(x - 1)|} > \frac{1}{3|x - 1|} > \frac{1}{3\delta} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } N < \frac{1}{3} \\ N \text{ si } N \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Así, en cualquier caso, $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x)| > N$. Una demostración análoga muestra que $f(x) \to \infty$ si $x \to -1$.

Problema 3-80 La función $f(x) \to \infty$ si $x \to x_0$ si, y solamente si, $1/f(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$.

Solución. Si $1/f(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces, dado $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{N}$, es decir, $|f(x)| > N$ si $0 < |x - x_0| < \delta$ y, por tanto, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to x_0$.

Problema 3-81 Pruebe que $\lim_{x \to 1} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = -\infty$. ¿Cuál es el mayor valor de δ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} < -1000$?

Solución. Si $1 < x < 2 \Rightarrow \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = \frac{(-1)^1}{x - 1} = -\frac{1}{x - 1} \to -\infty$ si $x \to 1^+$.

Si $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = \frac{(-1)^0}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \to -\infty$ si $x \to 1^-$. Por tanto, $\frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} \to -\infty$ si $x \to 1$.

Como $\frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = -\frac{1}{x - 1} < -\frac{1}{\delta}$ si $0 < |x - 1| < \delta < 1$. $\delta = 10^{-3}$ es el número más pequeño tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} < -1000$.

Problema 3-82 Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x)$ es acotada en un entorno de x_0 al cual no pertenece x_0.

Solución. Si $\varepsilon = 1$, se puede hallar δ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |A| \leq \leq |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |A| + 1$. Se empleó la desigualdad $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Se elige $M = |A| + 1$; entonces $f(x) \leq M$ en $0 < |x - x_0| < \delta$.

Problema 3-83 Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, entonces existe un entorno al cual no pertenece x_0 y en el cual $f(x)$ y A tienen el mismo signo.

Solución. Suponga que $A > 0$ y sea $\varepsilon = A/2$. Elija $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < A/2 \Leftrightarrow f(x) - A < A/2 \Leftrightarrow A/2 < f(x) < 3A/2$$

y, por tanto, $f(x) > 0$. Si $A < 0$, elija $\varepsilon = -A/2 > 0$. Entonces se tiene $3A/2 < f(x) < A/2$ y, por tanto, $f(x) < 0$.

Problema 3-84 Suponga que $f(x) > 0$ en el intervalo $]x_0, x_1[$. *a)* Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f} = \infty$. *b)* Si $f(x) < 0$ en $]x_0, x_1[$. Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f} = -\infty$.

Solución. *a)* Dado $M > 0$ se quiere hallar $\delta > 0$ tal que $1/f > M$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$. Sea $\varepsilon = 1/M$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $f(x) < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$. Este es el δ que se pide cuando $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < 1/M \Rightarrow 1/f(x) > M$.

b) Dado $M < 0$ sea $\varepsilon = -1/M$. Sea $\delta > 0$ cuando $-\varepsilon < f(x)$ si $x_0 < x < x_0 + \delta$. Cuando $x_0 < x < < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > -\varepsilon \Rightarrow 1 < \frac{-\varepsilon}{f} \Rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{f}, \frac{1}{f(x)} < M$.

Encuentre los límites indicados

Problema 3-85 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 5}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{5}{x^5}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{3 - \frac{5}{x^5}} = \dfrac{4}{3}.$

Problema 3-86 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

Solución. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{2}(1 + n)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + 1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Nota. Progresiones aritméticas $s = \dfrac{n}{2}(a + l)$:

a = primer término
n = número de términos
l = último término

Problema 3-87 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

Solución. Escriba $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$1^3 = 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Sumando: $(n + 1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1)$

$$(n + 1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3\frac{n}{2}(n + 1) + (n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n + 1)^3 - (n + 1) - 3\frac{n}{2}(n + 1)\right]$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Problema 3-88 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$.

Solución.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 3}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}} = 1$$

Problema 3-89 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Solución. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}}{\frac{1}{x}(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 1.$

LIMITES DE LA FORMA $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = C$

Para hallar límites de la forma $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = C$ debe tenerse en cuenta que

1. Si existen los límites finitos $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, se tiene que $C = A^B$.

2. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, el problema de hallar el límite se resuelve directamente.

3. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, se supone que $f(x) = 1 + h(x)$, donde $h(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$ y, por consiguiente, $C = \lim_{x\to x_0} \left\{[1+h(x)]^{1/h(x)}\right\}^{h(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} h(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} [f(x)-1]g(x)}$

Nota. Se empleó el teorema: $\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = f[\lim_{x\to x_0} g(x)]$.

En los problemas que vienen a continuación se supondrá que $\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e = 2,7118$, y $\lim_{x\to 0_+} (1 + x)^{1/x} = e$. Se demostrarán en el capítulo correspondiente a las sucesiones.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 3-90 *a)* Halle el $\lim_{x\to 0} (\text{sen}\, 2x/x)^{1+x}$; *b)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^x$; *c)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$.

Solución. *a)* $\lim_{x\to 0} (\text{sen}\, 2x/x) = 2$ y $\lim_{x\to 0} (1+x) = 1$; por consiguiente, $\lim_{x\to 0} (\text{sen}\, 2x/x)^{1+x} = 2^1 = 2$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = 1/2$ y $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0.$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$. Haciendo las transformaciones que se indicaron anteriormente se encuentra que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right)\right]^x = \lim_{x\to\infty} \left\{\left[1 + \left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2x}{1+x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}$$

En este caso, se puede hallar el límite con más facilidad sin recurrir al procedimiento general, o sea:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

Problema 3-91 Calcule $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$.

Solución. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} [1 - (1 - \cos x)]^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}\right)^{1/x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}}{x}\right)} = e^{-0} = 1$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{-2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}}{x}\right) = -2 \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \dfrac{x^2}{4x} = -2 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{4} = 0.$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1.$

Problema 3-92 Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Solución. Recuerde que $\lim [\ln f(x)] = \ln [\lim f(x)]$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$$

Problema 3-93 $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}}{\frac{1}{x}(x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1-\frac{1}{x}} = -1.$

Problema 3-94 $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

Solución. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{1+x} - 1\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{-1}{1+x}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\left[1 + \frac{-1}{1+x}\right]^{-(1+x)}\right)^{\frac{x}{-(1+x)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{-(x+1)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{-\left(\frac{1}{x}+1\right)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Problema 3-95 $\lim_{n\to\infty} \{n[\ln(n+1) - \ln n]\}$.

Solución. $\lim_{n\to\infty} \{n(\ln(n+1) - \ln n]\} = \lim_{n\to\infty} n \ln \dfrac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =$

$$= \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$$

Problema 3-96 $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

Solución. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2x+3}{2x+1} - 1\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+2}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}} = e^1 = e$$

Problema 3-97 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$.

Solución. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\cos\frac{x}{m}-1\right)^m = \lim\limits_{m\to\infty}\left[1-\left(1-\cos\frac{x}{m}\right)\right]^m =$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}\right)^{-\frac{1}{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}}}\right]^{\left(-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}\right)m} =$$

$$= e^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-m\,2\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(-2m\,\text{sen}^2\frac{x}{2m}\right) = -2\lim_{m\to\infty} m\,\text{sen}\frac{x}{2m}\cdot\text{sen}\frac{x}{2m} = -2\lim_{m\to\infty}\frac{\text{sen}\frac{x}{2m}}{\frac{x}{2m}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\text{sen}\frac{x}{2m} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot\frac{x}{2}\cdot\text{sen}\,0 = -1\cdot\frac{x}{2}\cdot 0\cdot 2 = 0$$

Problema 3-98 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x}{\alpha} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln(e^x)^{1/x} + \frac{\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\ln e + \frac{\ln 1}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}1 + \frac{0}{\infty} = 1+0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\alpha} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}x} = \frac{\ln 1}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Problema 3-99 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+x}{3-x}\right)^x$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(2+x)^x}{\lim\limits_{x\to 0}(3-x)^x} = \frac{2^0}{3^0} = \frac{1}{1} = 1.$

Problema 3-100 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1)^{\frac{2}{1+1/x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2)^{\frac{2}{1+1/x}}} = \frac{1^2}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Problema 3-101 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{1/x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}}\right]^{-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}-2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} -2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = -2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{x} = -\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$,

tendremos $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Problema 3-102 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log(1+10x)^{1/x} = \log\lim\limits_{x\to 0}(1+10x)^{1/x} =$

$$= \log\lim_{x\to 0}\left[(1+10x)^{\frac{1}{10x}}\right]^{10x\cdot\frac{1}{x}} = \log e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x}{x}} = \log e^{\lim\limits_{x\to 0} 10} = \log e^{10} = 10\log e$$

Problema 3-103 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2x} = \ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2x} = 1.$

Problema 3-104 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{1/x^2} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = -\frac{1}{2}$. Según Problema 3-101.

Problema 3-105 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$.

Solución. Sea $e^x - 1 = \alpha$ y así cuando $x\to 0$, $\alpha\to 0$

$$e^x = 1+\alpha \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+\alpha) \Rightarrow x\ln e = \ln(1+\alpha) \Rightarrow x = \ln(1+\alpha)$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} =$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} = \frac{1}{\ln\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

Problema 3-106 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$, $(a > 0)$.

Solución. $a = e^{\ln a}$ y así $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}$.

Sea $e^{x\ln a} - 1 = \alpha$, y cuando $x\to 0$, $\alpha\to 0$.

$$e^{x\ln a} = 1+\alpha \Rightarrow x\ln a\cdot\ln e = \ln(1+\alpha) \Rightarrow x\ln a = \ln(1+\alpha) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x \ln a}-1}{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\ln a}{\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\ln a}{\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} =$

$$= \frac{\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln a}{\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Problema 3-107 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1),\ a > 0.$

Solución. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1).$

Sea $\dfrac{1}{n} = \alpha$, y cuando $n \to \infty$, $\alpha \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}(a^{\alpha}-1) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$$

Como $a = e^{\ln a} \Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{e^{\alpha \ln a}-1}{\alpha} = \ldots$ se sigue como en el problema anterior $= \ln a$.

Problema 3-108 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1-(e^{bx}-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{ax}-1)}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$ $e^{ax}-1 = \alpha$ y $\alpha \to 0$ cuando $x \to 0$; $e^{bx}-1 = \beta$ y $\beta \to 0$ cuando $x \to 0$.

$e^{ax} = 1+\alpha$	$e^{bx} = 1+\beta$
$ax \ln e = \ln(1+\alpha)$	$bx \ln e = \ln(1+\beta)$
$x = \dfrac{\ln(1+\alpha)}{a}$	$x = \dfrac{\ln(1+\beta)}{b}$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\dfrac{\ln(1+\alpha)}{a}} - \lim_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\dfrac{\ln(1+\beta)}{b}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{a}{\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} - \lim_{\beta\to 0} \frac{b}{\ln(1+\beta)^{1/\beta}} = \frac{a}{\ln e} - \frac{b}{\ln e} = a - b$$

Problema 3-109 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}.$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^x \operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^x \operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{x}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{e^0}\cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Problema 3-110 Si $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, $(x \neq 0)$, entonces claramente $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$. Encuentre todos los x tales que $|f(x)| > 1000$.

Solución. $|f(x)| > 1000 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{x-3}\right| > 1000 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-3}{x}\right| < \dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1000} < \frac{x-3}{x} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow -\frac{1}{1000} < 1 - \frac{3}{x} < \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{1000} - 1 < -\frac{3}{x} < \frac{1}{1000} - 1 \Leftrightarrow -\frac{1001}{1000} < -\frac{3}{x} < \frac{-999}{1000}$$

$$\frac{1001}{1000} > \frac{3}{x} > \frac{999}{1000} \Rightarrow \frac{1001}{3000} > \frac{1}{x} > \frac{999}{3000}$$

$$\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}.$$

Problema 3-111 La Figura 3-34 muestra parte del grafo de la función $f(x) = [x]$, donde $[x]$ es la parte entera de x (los puntos negros o «enteros» pertenecen al grafo, y no pertenecen a él los indicados por pequeños círculos). Es evidente en el grafo que $f(x)$ tiene un límite en todas partes, excepto en los «puntos enteros».

$$x = n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

En cada punto entero $x = n$, $f(x)$ tiene un límite lateral por la derecha

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n \tag{1}$$

y un límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \tag{2}$$

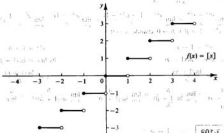


Figura 3-34

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta < 1$. Entonces, $0 < x - n < \delta \Rightarrow |f(x) - n| = |n - n| = 0 < \varepsilon$, mientras $0 < n - x < \delta \Rightarrow |f(x) - (n - 1)| = |(n - 1) - (n - 1)| = 0 < \varepsilon$, así que (1) y (2) se siguen de las definiciones. De otra parte, si x_0 no es un entero, entonces:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = [x_0]$$

En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, sea δ la distancia entre x y el entero más próximo. Entonces, cualquiera de las condiciones:

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$
$$0 < x - x_0 < \delta,$$
$$0 < x_0 - x < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - [x]| = |[x] - [x]| = 0 < \varepsilon$$

Problema 3-112 Encuentre los límites laterales en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{x + x^2}{|x|}, \quad (x \neq 0)$$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x + x^2}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} x = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x + x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} + \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} (-1) + \lim_{x\to 0^-} (+x) = -1$$

Encuentre los siguientes límites laterales

Problema 3-113 $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $b)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Solución. $a)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1.$

$$b)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x} - e^x}{\frac{1}{e^x} + e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = -1.$$

Problema 3-114 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$.

Solución. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + e^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{1/x}}} = 1.$

Problema 3-115 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{+\operatorname{sen} x}{-x} = -\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1,$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Problema 3-116 * Ilustrando el uso de la definición de una función que se aproxima a un límite hemos reservado la función que se muestra en la Figura 3-35, un ejemplo standard, pero uno de los más complicados:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \text{ irracional}, \ 0 < x < 1 \\ 1/q, \ x = \dfrac{p}{q}, \text{ reducida a su mínima expresión}, \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

(Recuerde que p/q está reducida a su mínima expresión si p y q son enteros sin ningún factor común y $q > 0$.)

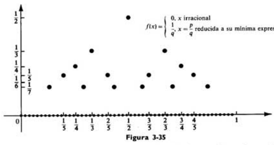


Figura 3-35

Para cualquier número a, con $0 < a < 1$, la función f se aproxima a 0 en a. Para probar esto, consideremos cualquier número $\varepsilon > 0$. Supongamos que n sea un número natural tan grande que $1/n \leq \varepsilon$. Observe que los únicos números x para los cuales $|f(x) - 0| < \varepsilon$ podría ser falsa son:

$$\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{4},\frac{3}{4}\,;\,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\,;\,\ldots\,;\,\frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}$$

(Si a es racional, entonces a podría ser uno de estos números.) Sin embargo, por muchos de estos números que haya hay solo un número finito de ellos. Por tanto, de todos ellos uno está más próximo a a; esto es, $|p/q - a|$ es la menor para un p/q entre estos números. (Si a pasa a ser uno de estos números, entonces solamente consideramos los valores $|p/q - a|$ para $p/q \neq a$.) Esta distancia puede elegirse como el δ. Porque si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x no es uno de $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ y, por tanto, $|f(x) - 0| < \varepsilon$ es verdad. Esto completa la prueba. Observe que nuestra descripción del δ que trabaja para un ε dado es completamente adecuada; no hay razón para dar una fórmula para δ en términos de ε.

Problema 3-117 • *a*) Suponga que $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$, con tal que estos límites existan.

b) ¿Cómo puede flaquear la hipótesis?

c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x, ¿necesariamente se sigue que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

Solución. *a*) Intuitivamente, $f(x)$ no se puede aproximar a un número $> \lim_{x\to a} g(x)$ porque $f(x) \leq g(x)$ y $g(x)$ está próximo a $\lim_{x\to a} g(x)$. Una prueba rigurosa se hace por contradicción. Supongamos que $l = \lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x) = m$. Sea $\varepsilon = l - m > 0$. Entonces hay un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|l - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|m - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Figura 3-36

Así para $0 < |x - a| < \delta$ tenemos $g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2} = l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$, contradiciendo la hipótesis.

b) Basta asumir que $f(x) \leq g(x)$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$ para algún $\delta > 0$.

c) No. Por ejemplo, sea $f(x) = 0$ y sea $g(x) = |x|$ para $x \neq 0$, y $g(0) = 1$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$$

Problema 3-118 • a) Pruebe que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$. Aquí escriba $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$.

b) ¿Qué sucede si $b = 0$?

c) La parte a) nos permite encontrar $\lim_{x\to 0}$ (sen $2x)/x$ en términos de $\lim_{x\to 0}$ (sen $x)/x$. Encuentre este límite de otra manera.

Solución. a) Deberíamos tener

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{b\,f(bx)}{bx} = b\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{bx} = b\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} = bl$$

El paso a la última igualdad puede justificarse así: Si $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $0 < |y| < \delta$, entonces $|f(y)/y| < \varepsilon$. Entonces si $0 < |x| < \varepsilon/|b|$ tenemos $0 < |bx| < \varepsilon$, y así $|f(bx)/bx| < \varepsilon$.

b) En este caso, $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = \lim_{x\to 0} f(0)/x$ no existe, a menos que $f(0) = 0$.

c) La parte a) muestra que $\lim_{x\to 0}$ (sen $2x)/x = 2\lim_{x\to 0}$ (sen $x)/x$. También podemos usar el siguiente procedimiento:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{sen} x)(\cos x)}{x} = 2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2$$

(Por supuesto, este método no operaría en general para $\lim_{x\to 0}$ (sen $\alpha x)/x$.)

Problema 3-119 • a) Pruebe que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

b) Pruebe que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x\to a} \max(f,g)(x) = \max(l, m)$ y, análogamente, para menor.

Solución. a) Intuitivamente, si $f(x)$ está próximo a l, entonces $|f(x)|$ está próximo a $|l|$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Pero $||f(x)| - |l|| \le |f(x) - l| < \varepsilon$.

b) Si $g \le f$, entonces $|f - g| = f - g$, así

$$f + g + |f - g| = f + g + f - g = 2f = 2\max(f, g)$$

y

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

Si $g \ge f$, entonces $|f - g| = -(f - g)$, así

$$f + g - |f - g| = f + g - [-(f - g)] = f + g + f - g = 2f = 2\min(f, g)$$

y

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

$$\lim_{x\to a}\max(f, g) = \lim_{x\to a}\frac{f + g + |f - g|}{2} = \lim_{x\to a}\frac{f + g}{2} + \lim_{x\to a}\frac{|f - g|}{2} =$$

$$= \frac{l + m}{2} + \frac{|l - m|}{2} = \frac{l + m + |l - m|}{2} = \max(l, m)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{|f - g|}{2} = \frac{1}{2}|l - m| \text{ por parte a)}$$

Nota. En general,

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

deducidas como se hizo aquí para f y g.

Problema 3-120 *a*) Pruebe que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe; esto es mostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = l$ es falso para cualquier número l.

b) Pruebe que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)}$ no existe.

Solución. *a*) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no puede aproximarse a un limite en 0 porque llega a ser arbitrariamente grande cerca de 0. En efecto, para cualquier $\delta > 0$ hay algún x que satisface $0 < |x| < \delta$, pero $\frac{1}{x} > |l| + \varepsilon$, es decir, $x = \min\left[\delta, \frac{1}{(|l| + \varepsilon)}\right]$. Este x no satisface $\left|\frac{1}{x} - l\right| < \varepsilon$.

b) Para cualquier $\delta > 0$ hay algún x que satisface $0 < |x - 1| < \delta$; pero $\frac{1}{(1-x)} > |l| + \varepsilon$, esto es, $x = \min\left[\frac{1 + \delta, 1 + 1}{(|l| + \varepsilon)}\right]$. Este x no satisface $\left|\frac{1}{(x-1) - l}\right| < \varepsilon$. Es también posible aplicar *b*): $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x-1)}$ si el último existe; por tanto, este último no existe, pues por *a*), el primero no existe.

Problema 3-121 * Pruebe que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces hay un número $\delta > 0$ y un número M tales que $|f(x)| < M$ si $0 < |x - a| < \delta$. (¿Qué significa esto gráficamente?)

Solución. Gráficamente esto significa que f es acotada en un intervalo alrededor de a. (Vea Fig. 3-37.)

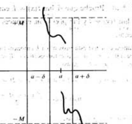


Figura 3-37

Elija $\delta > 0$, de manera que $|f(x) - l| < 1$ para $0 < |x - a| < \delta$. (Estamos eligiendo $\varepsilon = 1$.) Entonces $l - 1 < f(x) < l + 1$, y podemos suponer $M = \max(|l + 1|, |l - 1|)$.

Nota. $|f(x) - l| < 1 \Rightarrow -1 < f(x) - l < 1 \Rightarrow l - 1 < f(x) < l + 1$.

Problema 3-122 Pruebe que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para cualquier a.

Solución. Supongamos que $f(x)$ tiene un límite l en algún punto a. Entonces, eligiendo $\varepsilon = 1/2$ podemos encontrar un δ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1/2$$

Pero el entorno reducido $0 < |x - a| < \delta$ contiene un punto racional x_1 y un punto irracional x_2 (en realidad muchos). Se tiene entonces:

$$|f(x_1) - l| = |1 - l| < 1/2$$
$$|f(x_2) - l| = |0 - l| < 1/2$$

y de aquí
$$1 = |1 - l + l| \le |1 - l| + |l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

o sea, $1 < 1$, lo cual es imposible, y, por tanto, la función $f(x)$ no puede tener un límite en cualquier punto a.

Problema 3-123 * Pruebe que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

Solución. Consideremos, para simplificar, el caso $a > 0$. La idea básica es que debido a que $f(x)$ está próxima a a para todo racional x próximo a a, y próxima a $-a$ para todo x irracional próximo a a, no podemos tener $f(x)$ próxima a un número fijo. Para hacer que esta idea trabaje observaremos que para cualquier $\delta > 0$ hay x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) > a/2$, y también x con $0 < |x - a| < \delta$ y $f(x) < -a/2$. Debido a que la distancia entre $a/2$ y $-a/2$ es a, esto quiere decir que no podemos tener $|f(x) - l| < a$ para un x tal, no importa cuál sea l. (Vea Fig. 3-38.)

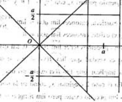


Figura 3-38

Problema 3-124 * *a*) Pruebe que si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

b) Generalice este hecho así: si $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \le M$, entonces $\lim_{x \to 0} g(x)h(x) = 0$. [Naturalmente, no es necesario hacer la parte *a*) si se tiene buen éxito en hacer la *b*); realmente la proposición de la parte *b*) puede hacerse más fácil que la *a*); éste es uno de los valores de la generalización.]

Solución. *a*) Se sigue de *b*), porque $\left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \le 1$ para todo $x\ (\neq 0)$.

b) Si $\delta > 0$ es tal que $|g(x)| < \varepsilon/M$ para todo x con $0 < |x| < \delta$, entonces $|g(x)h(x)| < \varepsilon$ para todos esos x.

Problema 3-125 * Considere una función f con la siguiente propiedad: si g es cualquier función para la cual $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ tampoco existe. Pruebe que esto ocurre si, y solo si, $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. (Es muy fácil: el suponer que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe lleva a una contradicción si se considera la g adecuada.)

Solución. Si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces es claro que $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$ no existe siempre que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no exista [vea el Problema 3-62 *b*) y *c*)]. Además, si $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, elijamos $g = -f$; entonces $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe; pero $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$ existe (ya que $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 0} [f(x) - f(x)] = \lim_{x\to 0} 0 = 0$); una contradicción.

Problema 3-126 • Este problema es análogo al anterior cuando $f + g$ se remplaza por $f \cdot g$. En este caso, la situación es más compleja y el análisis requiere varios pasos.

a) Suponga que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe y es $\neq 0$. Pruebe que si $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ tampoco existe.

b) Pruebe el mismo resultado si $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$.

c) Pruebe que si ninguna de estas dos condiciones permanece, entonces hay una función g tal que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe; pero $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ existe.

Nota. Considere separadamente los dos casos siguientes: 1. Para algún $\varepsilon > 0$ tenemos $|f(x)| > \varepsilon$ para todos los x suficientemente pequeños. 2. Para cada $\varepsilon > 0$ hay un x arbitrariamente pequeño con $|f(x)| < \varepsilon$. En el segundo caso comience eligiendo puntos x_n con $|x_n| < 1/n$ y $|f(x_n)| < 1/n$.

Solución. *a*) Si $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ existiera, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ debería existir también.

b) Claramente, si $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

c) En el caso 1 de la nota no podemos tener $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, así que por la hipótesis el límite no existe de ninguna manera. Porque *no* es verdad que $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$, se sigue que si $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$. Pero esto debería implicar que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, así que $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe. Por otra parte, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ existe obviamente. En el caso 2 elegimos x_n como en la nota. Definimos $g(x) = 0$ para $x \neq x_n$ y $g(x) = 1$ para $x = x_n$. Entonces $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

Problema 3-127 • Suponga que A_n es, para cada número natural n, algún conjunto finito de números en $[0, 1]$ y que A_n y A_m no tienen elementos en común si $m \neq n$. Definida f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ en } A_n \\ 0, & x \text{ no está en } A_n \text{ para cualquier } n \end{cases}$$

pruebe que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ para todo a en $[0, 1]$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos n con $1/n < \varepsilon$, y sea δ la distancia mínima de a a todos los puntos en $A_1, \ldots, A_n$ (excepto a mismo si a es uno de estos puntos). Entonces $0 < |x - a| < \delta$ implica que x no está en $A_1, \ldots, A_n$, y así $f(x) = 0$ o $1/m$ para $m > n$ y $|f(x)| < \varepsilon$.

Problema 3-128 Explique por qué las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ son todas correctas. Para cada $\delta > 0$ hay un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo x:

1. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.
2. Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| \leq \delta$.
3. Si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| < 5\delta$.
4. Si $0 < |x - a| < \varepsilon/10$, entonces $|f(x) - l| < \delta$.

Solución. 1. Esta es la definición usual, usando simplemente los números δ y ε, en lugar de ε y δ.

2. Esta es una modificación menor de 1: si la condición es verdad para todo $\delta > 0$, entonces se aplica a $\delta/2$; así que hay un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - l| \le \delta/2 < \delta$.

3. Esta es una modificación similar: aplíquela a $\delta/5$ para obtener 1.

4. Esta es también una modificación: se dice la misma cosa que en 1, porque $\varepsilon/10 > 0$ y es solo la existencia de algún $\varepsilon > 0$ lo que está en duda.

Problema 3-129 Dé ejemplos para mostrar que las siguientes definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ no son correctas.

a) Para todo $\delta > 0$ hay un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.
b) Para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - l|$, entonces $0 < |x - a| < \delta$.

Solución. *a*) Aunque $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$ es verdad, *no* es verdad que para *todo* $\delta > 0$ hay un $\delta > 0$ con $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ para $0 < |x - 1| < \delta$.

En efecto, si $\delta = 1$ no hay un ε tal, porque $1/x$ puede ser tan grande como se quiera para $0 < |x - 1| < 1$. Además, *cualquier* función acotada f satisface la condición, ya sea que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ es o no verdadera.

b) Si f es una función constante, $f(x) = c$, esta condición no se cumple, porque $|f(x) - c| < 1$ no implica ciertamente que $0 < |x - a| < \delta$ para cualquier δ. Además, la función $f(x) = x$, por ejemplo, satisface esta condición sin importar cuáles son a y l.

Problema 3-130 Pruebe que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Solución. Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } a < x < a + \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon,$$
$$\text{si } a - \delta_2 < x < a, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces o $a - \delta_2 < a - \delta < x$ o si no $a < x < a + \delta < < a + \delta_1$; así que $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Problema 3-131 * Pruebe que:

1. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(-x)$.
2. $\lim_{x \to 0} f(|x|) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.
3. $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(Estas igualdades y otras análogas se prestan a varias interpretaciones. Pueden significar solamente que los dos límites son iguales si ambos existen; o que si uno de ellos existe, el otro también existe y es igual a él; o que si uno u otro existe, el otro existe y es igual a él. Decida usted mismo qué interpretaciones son correctas.)

Solución. 1. Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Si $-\delta < x < 0$, entonces $0 < -x < \delta$, y de esta manera $|f(x) - l| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x \to 0^-} f(-x) = l$. Análogamente, si $\lim_{x \to 0^-} f(-x)$ existe, entonces $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe y tiene el mismo valor. (Intuitivamente, x está próximo a 0 y positivo si, y solo si, $-x$ está próximo a 0 y negativo.)

2. Si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = l$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Así, si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(|x|) - l| < \varepsilon$. Luego $\lim_{x \to 0} f(|x|) = l$. La prueba en dirección contraria es análoga.

Prólogo

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la matemática, puede decirse que los métodos tradicionalmente agrupados bajo los nombres de cálculo diferencial y de cálculo integral tienen por objeto resolver los problemas del cambio y del movimiento. En efecto, el cálculo diferencial se propone hallar la razón de variación entre dos magnitudes variables dependientes una de otra, y no ya en el caso de variaciones finitas solamente, sino también cuando dicha variación es instantánea. Así, el averiguar la rapidez con que se desplaza un cuerpo bajo la acción de la gravedad plantea problemas de velocidades medias límite, cuya determinación compete precisamente a los métodos diferenciales. Y al contrario, si se conoce el comportamiento instantáneo de una magnitud variable, es asunto de los métodos de integración el encontrar la marcha global de las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Así, la determinación de la trayectoria de un cuerpo del que se conocen, por ejemplo, las coordenadas instantáneas es cuestión que concierne al cálculo integral.

Sobra decir que el cálculo diferencial, y con más veras el cálculo integral, son dominios de la matemática de indudable refinamiento y que a veces plantean dificultades de cierta delicadeza en cuanto a su tratamiento. Por otra parte, el amplio uso que hacen la ciencia y la técnica modernas de estos métodos de cálculo, como lenguaje indispensable para expresar las leyes físicas con esquemas matemáticos adecuados, hace ineludible para todo estudiante de ciencias, de ingeniería, de economía, etc., la adquisición segura de dichos métodos, puesto que han de ser el instrumento de labor permanente y puesto que el dominarlos sin vacilaciones es condición primaria del trabajo científico eficaz y serio.

Precisamente, la colección de problemas resueltos detalladamente que constituyen esta obra ha sido concebida con el objeto de llevar al estudiante a una asimilación más rápida y segura de tales métodos de lo que suele ser posible con los textos corrientes; no se trata, por cierto, de una sarta de problemas de adiestramiento mecánico, sino de unas bases teóricas sólidas y suficientes que tienen como corolario una serie cuidadosamente graduada en dificultad de ejercicios que aplican en seguida la teoría expuesta. Y la resolución detallada tiene precisamente por objetivo acostumbrar al que aprende a trabajar correctamente, dando todos los pasos indispensables y fundamentando todas sus operaciones en la teoría que se acaba de exponer o que ya ha sido expuesta en capítulos anteriores. Así, etapa por etapa, el estudiante es conducido por mano firme hasta el momento en que, sin siquiera percatarse, ya sabe hacer los problemas solo, ya ha aprendido. Es el momento en que puede decirse plenamente que la técnica de cálculo particular que se estudiaba ha sido asimilada a la perfección.

También se han tenido en cuenta aquí las diversas posibilidades en cuanto a niveles de estudiantes que puedan aprovechar esta obra, y por ello es factible emplear el libro a cualquier nivel eligiendo problemas de tipo más «intuitivo» o más «formal», según se prefiera de acuerdo con el interés particular de aprendizaje. Hay, asimismo, problemas señalados con un asterisco *, con dos ** y hasta con tres *** para advertir sobre grados de dificultad. Tales problemas se destinan a quienes deseen profundizar en el dominio de la materia.

En cuanto al orden de disposición, cada capítulo desarrolla, pues, en su serie de problemas, ordenados por dificultad creciente, una noción específica a la cual se refieren las definiciones, principios y teoremas que aparecen en los preliminares del capítulo, y es por ello aconsejable atenerse escrupulosamente al orden de exposición que se da y trabajar los problemas de acuerdo con su numeración correlativa. Al final aparece un glosario de las definiciones y teoremas expuestos, como también de conceptos generales y de las notaciones utilizadas.

3. Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Si $0 < |x| < \sqrt{\delta}$, entonces $0 < x^2 < \delta$, y así $|f(x^2) - l| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x^2) = l$. La prueba en dirección contraria es análoga. (Intuitivamente, si x está próximo a 0, entonces x^2 está próximo a 0 y es positivo.)

Problema 3-132 * Suponga que $\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x)$. (Dibuje un grafo que ilustre esta proposición.) Pruebe que hay algún $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < a < y$ y $|x - a| < \delta$ y $|y - a| < \delta$. ¿Es verdadero el recíproco?

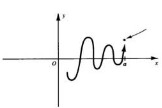


Figura 3-39

Solución. Sea $l = \lim_{x \to a^-} f(x)$ y $m = \lim_{x \to a^+} f(x)$. Porque $m - l > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - l| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } a - \delta < x < a,$$

$$|f(y) - m| < \frac{m - l}{2} \text{ cuando } a < y < a + \delta.$$

Esto implica que

$$f(x) < l + \frac{m - l}{2} < m - \frac{l - m}{2} < f(y)$$

El recíproco es falso, como se muestra para $f(t) \pm t$ y cualquier a. Solamente es posible concluir que $\lim_{x \to a^-} f(x) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Problema 3-133 Pruebe que $\lim_{x \to \infty} (a_n x^n + \ldots + a_0)/(b_m x^m + \ldots + b_0)$ existe si, y solo si, $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Cuándo $m > n$?

Nota. Un límite fácil es $\lim_{x \to \infty} 1/x^k = 0$; haga transformaciones de modo que ésta sea la única información que necesite.

Solución. Naturalmente, estamos suponiendo $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Si $x \neq 0$, entonces

$$\frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_m}{x^{n-m}} + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si $m < n$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = a_n$, pero $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Esto implica que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ no existe (de otro modo tendríamos $\lim_{x\to\infty} f(x) = [\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)] \cdot [\lim_{x\to\infty} g(x)] = 0$. Si $m \geq n$, escribimos:

$$\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{\dfrac{a_n}{x^{m-n}} + \dots + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_m + \dots + \dfrac{b_0}{x^m}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ si $m > n$, y a_n si $m = n$, mientras $\lim_{x\to\infty} g(x) = b_m$. Así $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ si $m > n$, y a_n/b_n si $m = n$.

Problema 3-134 Pruebe que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Solución. Si $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x > N$, y podemos claramente asumir que $N > 0$. Ahora, si $0 < x < \dfrac{1}{N}$, entonces $\dfrac{1}{x} > N$, así que $|f(1/x) - l| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = l$. La prueba en la otra dirección es semejante.

Problema 3-135 Defina «$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$».

a) Encuentre $\lim_{x\to-\infty} (a_n x^n + \dots + a_0)/(b_n x^m + \dots + b_0)$.

b) Pruebe que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$.

c) Pruebe que $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Solución. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ hay algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x < N$.

a) La respuesta es lo mismo que cuando $x \to \infty$ (Problema 3-133).

b) Si $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x > N$. Ahora, si $x < -N$, entonces $-x > N$, y así $|f(-x) - l| < \varepsilon$. Luego $\lim_{x\to-\infty} f(-x) = l$.

c) Si $l = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x < N$, y podemos asumir que $N < 0$. Ahora si $1/N < x < 0$, entonces $1/x < N$ y, por tanto, $|f(1/x) - l| < \varepsilon$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcule los siguientes límites

1. $\lim_{y\to\infty} \dfrac{(y+1)^2}{y^2+1}$. *Resp.:* 1

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1000x}{x^2-1}$. *Resp.:* 0

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$. *Resp.:* ∞

4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$. *Resp.:* 0

5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$. *Resp.:* 72

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$. *Resp.:* 2

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$. *Resp.:* 2

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$. *Resp.:* ∞

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$. *Resp.:* 0

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. *Resp.:* 1

11. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. *Resp.:* 0

12. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$. *Resp.:* ∞

13. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. *Resp.:* -2

14. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$. *Resp.:* ∞

15. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Resp.:* $3x^2$

16. $\lim\limits_{u\to-2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Resp.:* 0

17. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Resp.:* n (entero positivo)

18. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. *Resp.:* $-\frac{1}{56}$

20. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Resp.:* $\frac{3}{2}$

21. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. *Resp.:* $-\frac{1}{3}$

22. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. *Resp.:* 1

23. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

24. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$. *Resp.:* 0 $(a>0)$

25. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}+\sqrt[3]{x}}{h}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

26. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2-4x+3}$. *Resp.:* $-\frac{1}{3}$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$. *Resp.:* 0

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{x(x+a)}-x]$. *Resp.:* $\frac{a}{2}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$. *Resp.:* $-\frac{5}{2}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Resp.:* $\frac{1}{2}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$. *Resp.:* 0

32. *a)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. *Resp.:* 0

33. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. *Resp.:* 3

34. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$. *Resp.:* $\frac{5}{2}$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}\right)$. *Resp.:* π

36. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}$

37. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$. *Resp.:* $-\operatorname{sen} a$

38. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$. *Resp.:* $\cos x$

39. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

40. *a)* $\lim\limits_{x\to0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. *Resp.:* 0

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. *Resp.:* 1

41. $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. *Resp.:* $\frac{1}{2}$

42. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$. *Resp.:* 0

43. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

44. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$

45. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$. *Resp.:* $\frac{1}{2}$

46. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$. *Resp.:* 1

47. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$. *Resp.:* $\frac{2}{3}$

48. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{\text{sen } \pi x}$. *Resp.:* $\frac{2}{\pi}$

49. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen } 2x}{x + \text{sen } 3x}$. *Resp.:* $-\frac{1}{4}$

50. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}$. *Resp.:* π

51. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$. *Resp.:* $\frac{1}{4}$

52. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \text{sen } x} - \sqrt{1 - \text{sen } x}}{x}$. *Resp.:* 1

53. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x - 1}{x^2 - 1}\right)^{x+1}$. *Resp.:* $\frac{1}{4}$

54. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{\text{sen } x}{x}}$. *Resp.:* $\frac{3}{2}$

55. $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. *Resp.:* e^{-1}

56. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. *Resp.:* e^2

57. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^{x+2}$. *Resp.:* e^{-4}

58. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. *Resp.:* e^x

59. $\lim_{x \to 0} (1 + \text{sen } x)^{1/x}$. *Resp.:* e

60. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$. *Resp.:* e

61. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$. *Resp.:* e^3

62. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x}$. *Resp.:* α

63. $\lim_{x \to 0} (1 + 3 \text{ tg}^2 x)^{\text{ctg}^2 x}$. *Resp.:* e^3

64. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\text{sen } \beta x}$. *Resp.:* $\frac{\alpha}{\beta}$

65. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\text{sen } \alpha x - \text{sen } \beta x}$. *Resp.:* 1

66. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. *Resp.:* $+1$

67. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. *Resp.:* 1

68. *a)* $\lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{|x - 1|}$. *Resp.:* -1

b) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{|x - 1|}$. *Resp.:* 1

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$.

69. *a)* $\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x - 2}$. *Resp.:* $-\infty$

b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x - 2}$. *Resp.:* $+\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$. *Resp.:* 1

70. Encuentre el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \neq 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ en los puntos: *a)* $x = -1$; *b)* $x = -0{,}001$; *c)* $x = 0$; *d)* $x = 0{,}01$.

Resp.: *a)* 1; *b)* 10^{-6}; *c)* 0; *d)* 10^{-4}

71. La función $f(x) = \begin{cases} 3x \text{ si } -1 < x \leq 1 \\ 2x \text{ si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ ¿tiene un límite en: *a)* $x = \frac{1}{2}$; *b)* $x = 1$; *c)* $x = 1 \cdot 1$?

72. Si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ pruebe que $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{3}{5}$. Encuentre un valor de δ tal que $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - \frac{3}{5}| < 0{,}001$.

73. Pruebe que: *a)* $\lim_{x \to a} x = a$; *b)* $\lim_{x \to 1} 5x = 5$; *c)* $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$; *d)* $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$; *e)* $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

74. Evalúe: *a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; *b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$;

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; *d)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$. *Resp.:* *a)* 6; *b)* 10; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* $\frac{1}{2}$

75. Evalúe: *a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$; *b)* $\lim_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; *c)* $\lim_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$. *Resp.:* *a)* -2; *b)* 3/4; *c)* -2; *d)* $1/\sqrt{2a}$

76. Encuentre los límites laterales en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \frac{x+x^2}{|x|}, \quad (x \neq 0)$$

Resp.: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

77. Encuentre los límites laterales en $x = 0$ y $x = 1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Resp.: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

78. Si $f(x) = \dfrac{1+2x}{x}$, $(x \neq 0)$, entonces obviamente $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Encuentre todos los x tales que $|f(x)| > 10^4$.

79. ¿Cuáles de los siguientes límites son iguales a ∞? (pero no $+\infty$ o $-\infty$):

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$; *b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$; *c)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$; *d)* $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$

Resp.: *a)* y *d)* iguales a ∞; *b)* y *c)* iguales a $+\infty$

80. Evalúe cada uno de los siguientes límites, resolviendo la indeterminación de la forma ∞/∞:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} ax}{\operatorname{cosec} bx}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$; *b)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$; *c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{a-\frac{1}{x}}{b+\frac{1}{x}}$.

Resp.: *a)* b/a; *b)* 1/2; *c)* -1

81. Calcule:

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x(x-1)^3}$; *b)* $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x(x-1)^3}$; *c)* $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} \sec x$; *d)* $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{cosec} x$.

Resp.: *a)* $+\infty$; *b)* $-\infty$; *c)* $+\infty$; *d)* $-\infty$

CAPITULO 4

Continuidad y discontinuidad

Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y x_0 un punto de acumulación de $\mathscr{D}_f$; decimos que f es continua en x_0 si, y solamente si, cada una de las siguientes condiciones se verifica:

1. $x_0 \in \mathscr{D}_f$. 2. f es convergente en x_0. 3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

La definición de continuidad en términos de ε y δ es: f es continua en $x_0 \Leftrightarrow x_0 \in \mathscr{D}_f$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_f = \delta_f(\varepsilon, x_0)$ tal que $x_0 \in \mathscr{D}_f$ y $|x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Observe que en la definición anterior $f(x_0)$ desempeña el papel de L en la definición de límite. También la condición $0 < |x - x_0|$ falta porque $|f(x) - fx_0)| < \varepsilon$ automáticamente se verifica si $x = x_0$. Si alguna de las tres condiciones de la definición de continuidad no se verifica se dice que la función es *discontinua*.

Ejemplo 4-1. $f(x) = \text{sen}\, x/x$, $x \neq 0$, es discontinua en $x_0 = 0$ porque $f(0)$ no está definida. Sin embargo, sen x/x converge en 0 y tiene por límite a 1.

Ejemplo 4-2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ es discontinua en $x_0 = 0$ porque $f(x)$ no es convergente en $x_0 = 0$.

Ejemplo 4-3. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \text{ si } x \neq 3 \\ 5 \text{ si } x = 3 \end{cases}$ es discontinua en $x_0 = 3$ porque $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$, mientras que $f(3) = 5$.

Ejemplo 4-4. Sea $h(x) = \begin{cases} 3 + x \text{ si } x \leq 1 \\ 3 - x \text{ si } 1 < x \end{cases}$. Veamos qué sucede en el punto $x_0 = 1$. $h(1) = 4$, por tanto, se verifica la condición 1. Además $\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 4$ y $\lim_{x \to 1^-} h(x) =$ $= \lim_{x \to 1} (3 - x) = 2$. Esto prueba que no existe el límite de la función en $x_0 = 1$; por consiguiente, no se cumple la condición 3. Lo cual muestra que la función no es continua en $x_0 = 1$.

Preservación de la continuidad

Teorema. Sean f y g funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuas en x_0. Entonces $f + g$, fg, $1/g$, f/g son continuas en x_0, excepto que la continuidad no existe para $1/g$ y f/g si $g(x_0) = 0$.

Demostración. Es un corolario inmediato del álgebra de los límites según la definición de continuidad. Por ejemplo, para mostrar que $f + g$ es continua en x_0 si f y g son continuas en x_0, se debe mostrar que:

1. $x_0 \in \mathscr{D}_{f+g}$. 2. $f + g$ converge en x_0. 3. $\lim_{x \to x_0} (f + g) = f(x_0) + g(x_0)$.

La parte 1 es verdadera, puesto que de la continuidad de f y g se tiene que $x_0 \in \mathscr{D}_f$ y $x_0 \in \mathscr{D}_g$, por tanto, $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g = \mathscr{D}_{f+g}$. La parte 2 queda verificada por la regla de la suma, del álgebra de límites, que dice que la suma de funciones convergentes es convergente en x_0. 3. $\lim_{x \to x_0} (f + g) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$. La primera igualdad se justifica por la suma de límites y la segunda por la continuidad de f y g.

Teorema de la continuidad para funciones compuestas. Sean f y g dos funciones continuas. $x_0 \in \mathscr{D}_g$ y $g(x_0) \in \mathscr{D}_f$; g continua en x_0 y f continua en $g(x_0)$. Entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Demostración. La demostración es simplemente la del teorema del límite, para funciones compuestas, según la definición de continuidad.

Ejemplo 4-5. La función $f(x) = \sqrt{\cos 2x + 3}$ es la compuesta de la cadena de funciones,

$$x \xrightarrow{f_1} 2x \xrightarrow{f_2} \cos 2x \xrightarrow{f_3} \cos 2x + 3 \xrightarrow{f_4} \sqrt{\cos 2x + 3}, f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

cada una de las cuales es continua en todo punto de su dominio.

Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas

Teorema fundamental. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}, f$ continua sobre $[a, b]$, entonces $\mathscr{R}_f = \{f(x); x \in [a, b]\}$ es un intervalo cerrado y acotado. La demostración se basa en el axioma de plenitud de los números reales.

Teorema del valor extremo. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y f continua sobre $[a, b]$. Entonces existen x' y x'' en $[a, b]$ tales que $\mathscr{R}_f = [f(x'), f(x'')]$, es decir, que $x \in [a, b] \Rightarrow f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$.

Demostración. Por el teorema fundamental, podemos hacer que $[c, d]$ sea el conjunto de valores de f, con c y d números reales. Entonces $f(x) \in [c, d]$ para todo $x \in [a, b]$. Si x' y x'' son las preimágenes de c y d, respectivamente, tenemos que $f(x) \in [f(x'), f(x'')]$ para todo $x \in [a, b]$. (Vea Figs. 4-1 y 4-2.)

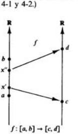


Figura 4-1

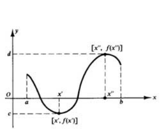


Figura 4-2

Teorema de acotación. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y f continua sobre $[a, b]$. Entonces existe un número real positivo M tal que $\mathscr{R}_f \subset [-M, M]$, es decir, $x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \le M$.

Demostración. Aplicando el teorema del valor extremo, hagamos $M = \max\{|f(x')|, |f(x'')|\}$. Es decir, M es la distancia del origen al punto extremo del conjunto de valores que está más alejado del origen (vea Fig. 4-3). Entonces $|f(x')| \le M$ y $|f(x'')| \le M$; por tanto, $-M \le f(x') \le M$ y $-M \le f(x'') \le M$. De donde $f(x') \le f(x) \le f(x'') \Rightarrow -M \le f(x) \le M$.

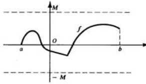


Figura 4-3

Teorema del valor intermedio. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y f continua sobre $[a, b]$ y $k \in [f(x_1), f(x_2)]$ con $x_1, x_2 \in [a, b]$. Entonces $k \in \mathscr{R}_f$ y existe $c \in [x_1, x_2]$ o $c \in [x_2, x_1]$ tal que $k = f(c)$.

Demostración. Suponga que $x_1 < x_2$. Entonces, por el teorema fundamental, el conjunto de valores de la restricción de f a $[x_1, x_2]$ es un intervalo que contiene a $f(x_1), f(x_2)$ y, por tanto, el punto k entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Así, existe una preimagen c en $[x_1, x_2]$ tal que $f(c) = k$. (Vea Fig. 4-4.)

Teorema del cero. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ y f continua sobre $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $r \in]a, b[$ tal que $f(r) = 0$.

Demostración. Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(b) < 0 < f(a)$. Si se hace que a, 0, b y r desempeñen el papel de x_1, k, x_2 y c, respectivamente, en el teorema del valor intermedio (vea Fig. 4-5), queda demostrado.

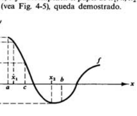


Figura 4-4

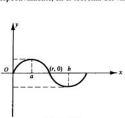


Figura 4-5

Clasificación de las discontinuidades. Prolongación continua

Cuando en la definición de continuidad la condición 1 no se cumple, es decir, cuando el valor de la función no existe en ese punto, esto da lugar a discontinuidades, que son de tres tipos. Algunas discontinuidades se pueden eliminar por medio de un procedimiento adecuado; se llaman discontinuidades *evitables*. Otras necesitan un tratamiento especial a causa de que el valor funcional no se puede controlar; estas discontinuidades se llaman *polos*. Finalmente, existen otras que no se pueden evitar y se las llama discontinuidades *esenciales*. En resumen:

Definición. Dada una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se dice que x_0 es una discontinuidad de f del tipo: 1, discontinuidad evitable $\Leftrightarrow f$ es convergente en x_0; 2, un polo $\Leftrightarrow 1/f$ converge a 0 en x_0; 3, discontinuidad esencial de $f \Leftrightarrow x_0$ no es ni un polo ni una discontinuidad evitable.

Ejemplo 4-6. *a)* Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$, entonces $x_0 = 1$ es una discontinuidad evitable porque $1 \notin \mathscr{D}_f$ y $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$.

b) Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$, entonces $x_0 = 1$ es un polo porque $1 \notin \mathscr{D}_f$ y $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2} = \dfrac{0}{1} = 0$.

c) Si $f(x) = |x|/x$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, entonces $x_0 = 0$ es una discontinuidad esencial porque $0 \notin \mathscr{D}_f$ y f y $1/f$ no son convergentes en $x_0 = 0$.

Definición. Dada una función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y una discontinuidad evitable x_0, se dice que f^* es una prolongación continua de f en x_0 si, y solamente si,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathscr{D}_f \\ \lim\limits_{x \to x_0} f \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

También se dice que la función se ha regularizado.

Ejemplo 4-7. *a)* Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \in \mathbf{R} - \{1\}$. En $x_0 = 1$ existe una discontinuidad. Como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$, entonces en $x_0 = 1$ hay una discontinuidad evitable. Por tanto, su prolongación continua está dada por

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \in \mathbf{R} - \{1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

b) Si $f(x) = \operatorname{sen} x/x$, sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x/x = 1$, entonces su prolongación continua en $x_0 = 0$ es

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in \mathbf{R} - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

c) Sea $f(x) = \operatorname{tg} x/x$. Como $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x/x = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} =$ $= 1 \cdot 1 = 1$. Entonces su prolongación es

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \mathscr{D}_f - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

En términos de parejas ordenadas, la prolongación continua f^* se obtiene agregando a f la pareja $(x_0, \lim\limits_{x \to x_0} f)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Los siguientes problemas tienen por objeto demostrar la continuidad de algunas funciones empleando la definición de continuidad en términos de ε y δ.

Problema 4-1 Demuestre que la función $f(x) = mx + b$ es continua en todo punto de $\mathbf{R}$.

Solución. Si $\varepsilon > 0$, tenemos que $|f(x) - f(a)| = |m(x - a)| = |m|\,|x - a| < \varepsilon$. Entonces $|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$ si $m \neq 0$. En caso de que m sea cero, cualquier número positivo sirve como δ. Este caso se puede incluir en el caso en que $m \neq 0$ tomando a $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + |m|}$ que es menor que $\frac{\varepsilon}{|m|}$. Este valor de δ da $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$. Esto muestra que la función f es continua en a para todo a.

Problema 4-2 Sea $f(x) = 3x + 1$. Halle un δ que satisfaga la proposición $|x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x + 1) - 7| < \frac{1}{2}$.

Solución. Como, por el problema anterior, la función es continua en $x = 2$, tal δ existe. Ahora, $|(3x + 1) - 7| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |3x - 6| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\,|x - 2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{1}{6}$ si se elige a $\delta = \frac{1}{6}$

Problema 4-3 1. Pruebe que la función $f(x) = 3x + 1$ es continua en 1. 2. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ es continua en $x = 3$ y $x = 2$. 3. Si $\varepsilon = 0.01$, ¿qué valor se elige para asegurar que la función sea continua en $x = 2$?

Solución. 1. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ elijamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Si $|x - 1| < \delta$, entonces $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow 3\,|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |(3x + 1) - 4| < \varepsilon$. Por tanto, $|x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x + 1) - 4| < \varepsilon$. Esto demuestra que la función es continua en $x = 1$.

2. Se debe mostrar que para cada número real positivo ε existe un δ tal que $|x - 3| < \delta$ implica que $|(x^2 - 3x - 4) - (-4)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 3x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|\,|x - 3| < \varepsilon$, si restringimos los valores de x a un entorno de radio 1 alrededor de 3, entonces $2 < x < 4$ y $|x| < 4$.

Para cualquier ε elegimos a δ como el mínimo de $\frac{\varepsilon}{4}$ y 1. Así, si $|x - 3| < \delta$, entonces $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $|x - 3| < 1 \Leftrightarrow 4\,|x - 3| < \varepsilon$ y $3 - 1 < x < 3 + 1 \Leftrightarrow 4\,|x - 3| < \varepsilon$ y $2 < x < 4 \Leftrightarrow 4\,|x - 3| < \varepsilon$ y $|x| < 4 \Rightarrow |x|\,|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 3x| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x^2 - 3x - 4 - (-4)| < \varepsilon$. $\therefore$ $|x - 3| < \delta \Rightarrow |(x^2 - 3x - 4) - (-4)| < \varepsilon$.

$|(x^2 - 3x - 4) - (-6)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1|\,|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\,|x - 2| < \varepsilon$ si $\delta \leq 1 \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. En $2\,|x - 2| < \varepsilon$ remplace 2 por $|x - 1|$, puesto que $|x - 1|$ nunca es mayor que 2, si x está en un entorno de radio 1 alrededor del punto 2. Es decir, $1 < x < 3$, entonces $0 < x - 1 < 2$.

Para un ε dado, elijamos un δ que sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y 1; si $|x - 2| < \delta$ entonces $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow 2\,|x - 2| < \varepsilon$ y $2 - 1 < x < 2 + 1 \Leftrightarrow 2\,|x - 2| < \varepsilon$ y $0 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow 2\,|x - 2| < \varepsilon$ y $|x - 1| < 2$. Como $|x - 1| < 2$, se puede remplazar $|x - 1|$ por 2 en $2\,|x - 2| < \varepsilon$, puesto que este remplazo hace el segundo miembro más pequeño. $|x - 1|\,|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x^2 - 3x - 4) - (-6)| < \varepsilon$. Por tanto, $|x - 2| < \delta \Rightarrow |(x^2 - 3x - 4) - (-6)| < \varepsilon$.

3. $\delta \leq 0{,}005$, puesto que $|x - 2| < 0{,}005 \Rightarrow |f(x) - f(2)| < 0{,}01$. Verificación: sea $x = 2{,}004$, entonces $|2{,}004 - 2| < 0{,}005$ y $|(2{,}004)^2 - 3(2{,}004) - 4 - (-6)| = (0{,}004)(0{,}16) < 0{,}01$.

Problema 4-4 Pruebe que: *a)* $f(x) = x^2 - x - 12$ es continua en $x_0 = 5$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ es continua en $x_0 = 3$.

Solución. *a*) Para cada ε elija $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, 1\right\}$ (¿por qué?) Si $|x-5|<\delta \Rightarrow |x-5|<\frac{\varepsilon}{10}, |x-5|<1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 10|x-5|<\varepsilon$ y $5-1<x<5+1 \Leftrightarrow 10|x-5|<\varepsilon$ y $8<x+4<10 \Leftrightarrow 10|x-5|<\varepsilon$ y $|x+4|<10 \Rightarrow |x+4||x-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-x-20|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x^2-x-12)-8|<\varepsilon$. $\therefore\ |x-5|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |(x^2-x-12)-8|<\varepsilon$.

b) Como $\left|\frac{x^2+x-6}{x^2-4}-\frac{6}{5}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-3|<20\varepsilon$ si $|x+2|>4$. Para cada ε dado, elijamos $\delta = \min\{20\varepsilon, 1\}$. Si $|x-3|<\delta \Rightarrow |x-3|<20\varepsilon$ y $|x-3|<1 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{20}<\varepsilon$ y $3-1<x<3+1$.

$$\frac{|x-3|}{5\cdot 4}<\varepsilon \text{ y } 4<x+2<6 \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{5\cdot 4}<\varepsilon \text{ y } |x+2|>4 \Rightarrow \frac{|x-3|}{5|x+2|}<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{5x+15-6x-12}{5(x+2)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+3}{x+2}-\frac{6}{5}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{6}{5}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x^2+x-6}{x^2-4}-\frac{6}{5}\right|<\varepsilon. \quad \therefore\ |x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+x-6}{x^2-4}-\frac{6}{5}\right|<\varepsilon$$

Problema 4-5 Estudie la continuidad de la función parte entera de x; $f(x) = [x]$.

Solución. Hay dos casos que considerar: 1, $x_0 = n$ un entero, y 2, x_0 no es entero. En el primer caso, $f(x_0) = n$ y $f(x_0) = n-1$ para $x < x_0, |x-x_0|<1$; $f(x) = n$ para $x > x_0, |x-x_0|<1$. Por tanto, no importa lo pequeño que sea δ, existen valores de x a una distancia δ de x_0 para los cuales $|f(x_0)-f(x)| = 1$ y la condición de continuidad no se verifica si $\varepsilon < 1$. Entonces f no es continua en x_0 = un entero. Para el segundo caso, x_0 no es entero, sea $n = [x_0]$, entonces $n < x_0 < n+1$ y los dos números $\delta_1 = x_0 - n$, $\delta_2 = (n+1) - x_0$ son positivos. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \min(x_0 - [x_0], [x_0]+1-x_0)$. Entonces $\delta > 0$ y si $|x-x_0|<\delta$, entonces x está también entre $[x_0]$ y $[x_0+1]$; por tanto, $[x] = [x_0] = f(x_0)$ y $|f(x)-f(x_0)| = 0$. Lo cual muestra que la función es continua para todo $x_0 \neq$ de un entero, porque para cualquier x_0 y $\varepsilon > 0$ es $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ cuando $|x-x_0|<\delta$.

Problema 4-6 La función $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. Muestre que es discontinua en todo punto.

Solución. Suponga que f tiene un límite c en x_0. Si se elige $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se puede hallar δ tal que $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \frac{1}{2}$.

El entorno $0 < |x-x_0| < \delta$ contiene un punto racional x_1 y un punto irracional x_2 (en realidad infinitos). Entonces

$$|f(x_1)-c| = |1-c| < \frac{1}{2}$$

$$|f(x_2)-c| = |0-c| < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = |1-c+c| \leq |1-c| + |c| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Como esto es imposible, $f(x)$ no tiene límite en ningún punto x_0; por tanto, no es continua en ningún punto.

Problema 4-7 Estudie la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 1/q \text{ si } x \text{ es racional.} \end{cases}$

Solución. Por ejemplo, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = f(3/2) = 1/2$, etc. Si x es un número racional y $f(x_0) = 1/q$, entonces $\varepsilon = 1/2q$ es un número positivo para el cual no existe δ correspondiente, porque hay valores irracionales de x arbitrariamente cercanos a x_0. Esto muestra que la función no es continua para valores racionales. Si x_0 es irracional, entonces $f(x_0) = 0$, y si $\varepsilon > 0$, la condición $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ se convierte en $|f(x)| < \varepsilon$ (1).

Esta desigualdad (1) es válida para todos los valores irracionales de x, porque $f(x_0) = 0$. Si x es el número racional p/q, entonces (1) equivale a $1/q < \varepsilon$ o $q > 1/\varepsilon$ (2).

La desigualdad (2) se verifica cuando q es lo suficientemente grande. ¿Se puede hallar $\delta > 0$ para que q sea grande cuando x esté a una distancia δ de x_0? Sí, de la siguiente manera: Considere los enteros positivos $1, 2, \ldots, [1/\varepsilon]$ (3) que no satisfacen a (2). [Si por casualidad el ε dado es mayor que 1, elimine la lista (3) y tome $\delta = 1$, porque (1) se verificará para todo x.] Hay un número finito de enteros en la lista (3). Si q es uno cualquiera de éstos, quedan q posibilidades para que p satisfaga a $x_0 - 1/2 < p/q < x_0 + 1/2$. Así, si restringimos lo dicho a un entorno de radio 1/2 alrededor de x_0, se halla un número finito (a lo más n^2, con $n = [1/\varepsilon]$) de números racionales p/q cuyos denominadores no verifican la desigualdad (2). Si representamos estos números racionales por $r_1, r_2, \ldots, r_N$, $N \leq n^2 \Rightarrow |x_0 - r_1|, |x_0 - r_2|, \ldots, |x_0 - r_N|$ (4) son todos positivos, porque los r_i son racionales y x_0 irracional. Sea δ el mínimo de estos números (4). Entonces $\delta > 0$ y cualquier número racional p/q que esté a una distancia menor que δ de x_0 no puede tener un denominador en la lista (3); por tanto,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \text{ irracional, o} \\ x \text{ racional } p/q \text{ y } q > 1/\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left\{ {0 \atop 1} \right\} < \varepsilon \end{cases}$$

Esto demuestra que la función es continua en todo punto racional x_0.

Problema 4-8 Muestre que $\operatorname{sen} x/x = 1/2$, para algún valor de x entre 0 y π.

Solución. Como $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi} > \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}}{\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6}} < \dfrac{1}{2}$ aplicando el teorema del valor intermedio, se sabe que por la continuidad de $\operatorname{sen} x/x$ sobre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ que $\operatorname{sen} c/c = \frac{1}{2}$ para algún $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Intuitivamente, esto quiere decir que una recta horizontal por $\frac{1}{2}$ sobre el eje de las Y corta el grafo de $\operatorname{sen} x/x$ en un punto por encima del intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Problema 4-9 Muestre que $x^2 = a$ tiene una solución si $a \geq 1$.

Solución. Sea $f(x) = x$. Entonces $f(1) = 1$ y $f(a) = a^2$. Si $a \geq 1$, entonces $a^2 \geq a \geq 1$; por tanto, según el teorema del valor intermedio, para algún $c \in [1, a^2]$ se tiene que $f(c) = a$, es decir, $c^2 = a$.

Problema 4-10 Halle los enteros positivos que son extremos superiores e inferiores para los ceros de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Solución. Como $f(-2) = -3, f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(1) = -3$ y $f(2) = 1$, por el teorema del cero, las raíces de f están en los intervalos $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ y $]1, 2[$, puesto que f es continua y $f(-2)f(-1) < 0, f(-1)f(0) < 0$ y $f(1)f(2) < 0$.

Problema 4-11 Muestre que $\sqrt{2}$ existe.

Solución. Sea $f(x) = x^2 - 2$, que es continua sobre **R**. Como $f(1)f(2) = (-1)(2) < 0$, se sabe, por el teorema del cero, que existe por lo menos un $r \in]1, 2[$ tal que $f(r) = r^2 - 2 = 0$. Como $r > 0$ y satisface la ecuación $r^2 - 2$, se tienen que $r = \sqrt{2}$.

Problema 4-12 Muestre que el grafo de $f(x) = x$ corta el grafo de $\operatorname{sen} 2x - x$ en el intervalo $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{3}$.

Solución. Sea $g(x) = \operatorname{sen} 2x - x$. Entonces $g\left(\frac{\pi}{4}\right) g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < 0$; por tanto, para algún $r \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right[$ se tiene que $\operatorname{sen} 2r - r = 0$, es decir, $\operatorname{sen} 2r = r$.

Problema 4-13 Si $f(x)$ satisface la ecuación funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todos los valores de x y y, halle los valores de $f(x)$ para los valores racionales de x y demuestre que si $f(x)$ es continua, entonces $f(x) = cx$, c una constante.

Solución. Para cualquier número natural n, $f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2f(1) = \dots = nf(1)$. Además, como $f(0) = f(0) + f(0)$, se tiene que $f(0) = 0$; entonces de $f(0) = f(n) + f(-n)$, se tiene $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$.

Finalmente, para todo número racional $r = p/q$, $qf(p/q) = f(q \cdot p/q) = f(p) = pf(1)$. Esto demuestra que f es una función lineal sobre los números racionales, $f(r) = ar$, con $a = f(1)$.

Si f es continua, se sigue que $f(x) = ax$ para todo x, pues la diferencia $|f(x) - ar|$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando r lo suficientemente cercano a x.

Problema 4-14 *a*) Si $f(x) = x^n$, halle un δ que dependa de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$; *b*) haga lo mismo si $f(x)$ es el polinomio $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Solución. $|x^n - x_0^n| = |x - x_0|\,|x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}| \le \delta |x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}|$. Elija a $\delta < 1$ de tal manera que $|x| < |x_0| + 1$, entonces $|x^n - x_0^n| < \delta\,\{(1 + |x_0|)^{n-1} + |x_0|\,(1 + |x_0|)^{n-2} + \dots\} < \delta\,\{(|x_0| + 1)^{n-1} + (|x_0| + 1)^{n-1} + \dots\}$ o $|x^n - x_0^n| < \delta n(1 + |x_0|)^{n-1}$

Basta elegir a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n(|x_0| + 1)^{n-1}}$ con $\varepsilon < 1$.

b) $|f(x) - f(x_0)| = |a_n(x^n - x_0^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \dots| \le |a_n|\,|x^n - x_0^n| + \dots + |a_1|\,|x - x_0|$. Por el resultado anterior concluimos que $|f(x) - f(x_0)| < A\,\delta\,\{n(|x_0| + 1)^{n-1} + (n-1)(|x_0| + 1)^{n-2} + \dots\}$, siendo A el máximo de los $|a_r|$, $r = 1, 2, \dots, n$. Por tanto,

$$|f(x) - f(x_0)| < A\,\delta\,\{n(|x_0| + 1)^{n-1} + n(|x_0| + 1)^{n-1} + \dots\}$$

Basta tomar $\delta < \dfrac{\varepsilon}{An^2(|x_0| + 1)^{n-1}}$ o $\delta < 1$, que es más pequeño.

Problema 4-15 Si $f(x) = x^2 + x$, determine los intervalos sobre los cuales la función tiene signo constante.

Solución. Como $f(x) = x(x + 1)$, entonces $f(x) = 0$ si $x = 0$ o $x = -1$. Como es polinomio, es una función continua. Entonces f es de signo constante en los intervalos: $]-\infty, 1[$, $]-1, 0[$ y $]0, +\infty[$. Como $-2 \in]-\infty, -1[$ y $f(-2) = 2$, $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 1[$. Como $-\frac{1}{2} \in]-1, 0[$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, entonces $f(x) < 0$ si $x \in]-1, 0[$. Como $1 \in]0, +\infty[$ y $f(1) = 2$, $f(x) > 0$ si $x \in]0, +\infty[$. Esto se resume en la siguiente tabla:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$

Problema 4-16 Demuestre que si la función $f(x)$ es continua y no negativa en el intervalo $]a, b[$ la función $F(x) = \sqrt{f(x)}$ es también continua en este intervalo.

Solución. Es continua porque todo punto x_0 del intervalo $]a, b[$:

a) $x_0 \in \mathscr{D}_F$ porque $F(x_0) = \sqrt{f(x_0)}$; $f(x_0)$ existe por ser $f(x)$ continua en todo punto de $]a, b[$ y positivo.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)} = \sqrt{f(x_0)}$ existe ya que $\lim f(x)$ existe por ser $f(x)$ continua en $]a, b[$ (Problema 4-30) y es positivo e igual a $f(x_0)$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt{f(x_0)} = F(x_0)$.

Problema 4-17 Una función está dada por las fórmulas $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ A, & x = 2 \end{cases}$

¿Cómo debe elegirse el valor de la función $A = f(2)$ para que la función $f(x)$ sea continua cuando $x = 2$? Construya el grafo de la función $y = f(x)$.

Solución. Se elige $A = \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$

$A = 4$ sería la extensión continua de $f(x)$ en $x = 2$.

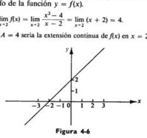


Figura 4-6

Problema 4-18 El segundo miembro de la igualdad $f(x) = 1 - x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ carece de sentido cuando $x = 0$. ¿Cómo elegir el valor de $f(0)$ para que la función $f(x)$ sea continua en este punto?

Solución. Se elige $f(0) = \lim_{x \to 0} \left(1 - x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 1.$

Problema 4-19 La función $f(x)$ es indeterminada en el punto $x = 0$. Determine $f(0)$ de tal forma que $f(x)$ sea continua en este punto:

a) $f(x) = \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$ (n es un número natural). *b)* $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x}$.

c) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solución. *a)* $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + x^n - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} n + \frac{n(n-1)}{2!} x + \ldots + x^{n-1} = n.$$

b) $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{1/x} = \ln \lim_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1 + x}{1 - x} - 1\right)^{1/x} =$

$= \ln \lim_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{1 - x}\right)^{1/x} = \ln \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + \dfrac{2x}{1 - x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\lim_{x \to 0} \frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{1-x}} =$

$= \ln e^2 = 2 \ln e = 2.$

c) $f(0) = \lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0.$

Sea $g(x) = -x^2$, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = x^2$; $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq x^2$, ya que $-1 \leq \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq 1$ para cualquier x. La función $f(x)$ en sandwich entre las funciones $g(x)$ y $h(x)$ convergentes en 0 con límite 0, es convergente en 0 con límite 0.

Nota. Cada una de las tres funciones anteriores tiene en $x_0 = 0$ una discontinuidad evitable ya que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe para cada una de ellas.

Problema 4-20 Averigüe si son continuas las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. *b)* $y = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$. *c)* $y = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x}$. *d)* $y = \ln(\cos x)$.

e) $y = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$. *f)* $y = e^{\frac{1}{x+1}}$. *g)* $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 3. \\ 2x+1 \text{ si } x > 3. \end{cases}$

Solución. *a)* No, porque para $x_0 = 2$, $y = \dfrac{4}{2-2} = \dfrac{4}{0} = \infty$, no está definida la función, luego $x_0 = 2 \notin \mathscr{D}_y$, y no se cumple la primera condición de continuidad.

$x_0 = 2$ es una discontinuidad polo de y, ya que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{y} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2} = \frac{0}{4} = 0$$

b) No, porque para $x_0 = 2$ la función $y = \dfrac{\sqrt{7+2}-3}{4-4} = \dfrac{0}{0}$ no está definida y así $x_0 = 2 \notin \mathscr{D}_y$.
Para $x_0 = -2$ la función $y = \dfrac{\sqrt{7-2}-3}{4-4} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{0} = \infty$ no está definida y así $x_0 = -2 \notin \mathscr{D}_y$.
$x_0 = 2$ es una discontinuidad evitable de y, porque

$$\lim_{x \to 2} y = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \cdot \frac{\sqrt{7+x}+3}{\sqrt{7+x}+3} = \lim_{x \to 2} \frac{7+x-9}{(x^2-4)(\sqrt{7+x}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24}$$

$x_0 = -2$ es una discontinuidad defectuosa polo de y, ya que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{y} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{7+x}-3} = \frac{0}{\sqrt{5}-3} = 0$$

c) No, porque para $x_0 = 0$ la función no está definida y, por tanto, $x_0 = 0 \notin \mathscr{D}_y$ y la primera condición de continuidad no se verifica. $x_0 = 0$ es una discontinuidad polo de y, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\text{sen}\,\pi/x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi/x}{\pi/x\ \text{sen}\,\pi/x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\pi\ \dfrac{\text{sen}\,\pi/x}{\pi/x}} = 0$$

d) No, porque para todos los $x_0 = 2k\pi + \pi/2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $y = \ln[\cos(2k\pi + \pi/2)] = \ln 0 = -\infty$ la función no está definida y $x_0 \notin \mathscr{D}_y$, no verificándose la primera condición. $x_0 = 2k\pi + \pi/2$ se denomina punto de discontinuidad infinita.

e) No, porque:

$$\lim_{x \to 0^+} \text{arc tg}\,\frac{1}{x} = \text{arc tg} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \text{arc tg} +\infty = \frac{\pi}{2}, \ldots$$

$$\lim_{x \to 0^-} \text{arc tg}\,\frac{1}{x} = \text{arc tg} \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \text{arc tg} -\infty = -\frac{\pi}{2}, \ldots$$

y así $\lim_{x \to 0} \text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$ no existe; por tanto, y es discontinua en $x_0 = 0$, pues no se cumple la segunda condición de continuidad.

f) No, porque para $x_0 = -1$ la función no está definida $y = e^{\frac{1}{1-1}} = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$. No se cumple la primera condición, es decir, $x_0 = -1 \notin \mathscr{D}_y$

g) No, porque no se cumple la segunda condición en $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9 \neq \lim_{x \to 3^+} f(7) = 7$$

Problema 4-21 Averigüe si son continuas y construya el grafo de las siguientes funciones:

a) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^n}, \ x \geq 0.$ *b)* $y = \lim\limits_{n \to \infty} (x \operatorname{arc\,tg} nx).$

Solución. *a)* $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^n} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1 + x^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} y = \lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + x^n} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1 + x^\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

y así $\lim\limits_{x \to 1} y$ no existe y no se cumple la segunda condición. (Vea Fig. 4-7.)

b) Es continua, porque para todo $x_0 \in \mathbf{R}$

1. $x_0 > 0 \quad y = \lim\limits_{n \to \infty} x_0 \operatorname{arc\,tg} nx_0 = x_0 \operatorname{arc\,tg} (+\infty) = x_0 \dfrac{\pi}{2}.$

   $x_0 < 0 \quad y = \lim\limits_{n \to \infty} x_0 \operatorname{arc\,tg} nx_0 = x_0 \operatorname{arc\,tg} (-\infty) = x_0 \left(-\dfrac{\pi}{2}\right).$

   $x_0 = 0 \quad y = \lim\limits_{n \to \infty} 0 \cdot \operatorname{arc\,tg} n \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$

   Por tanto, $x_0 \in \mathscr{D}_y.$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} y = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} x \operatorname{arc\,tg} nx = x_0 \operatorname{arc\,tg} \infty .$

   $= x_0(\pm \pi/2, 0).$

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} x \operatorname{arc\,tg} nx = x_0 \frac{\pi}{2} = f(x_0), \qquad x_0 > 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} x \operatorname{arc\,tg} nx = x_0 \left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(x_0), \quad x_0 < 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} x \operatorname{arc\,tg} nx = 0 = f(x_0), \qquad x_0 = 0.$$

(Vea Fig. 4-8.)

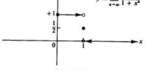


Figura 4-7

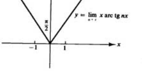


Figura 4-8

Problema 4-22 Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $]1, 2[$. Calcule aproximadamente esta raíz.

Solución. Sea $y = x^3 - 3x + 1 = f(x)$

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$
$$f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$$

Por ser la función continua en el intervalo $[1, 2]$ y porque $f(1) \cdot f(2) < 0$, por el teorema de los ceros se concluye que hay un punto $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$, o sea, $y = c^3 - 3c + 1 = 0$.

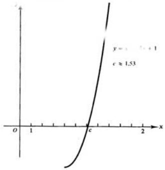


Figura 4-9

Problema 4-23 Demuestre que cualquier polinomio $P(x)$ de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Solución. Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, n impar.

$P(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n \begin{cases} > 0 \text{ si } a_0 > 0 \\ < 0 \text{ si } a_0 < 0 \end{cases}$ si $x_0 > 0$ y muy grande, pues $a_0x_0^n$ absorberá todos los términos negativos o positivos con exponente $< n$.

$$P(-x_0) = a_0(-x_0)^n + a_1(-x_0)^{n-1} + \dots + a_n = -a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n \begin{cases} <0 \text{ si } a_0 > 0 \\ >0 \text{ si } a_0 < 0 \end{cases}$$

pues si x_0 es muy grande, $-a_0x_0^n$ absorberá todos los términos positivos o negativos (según el caso) con exponente $<n$. Así, en cualquier caso, $P(x_0) \cdot P(-x_0) < 0$ y, por el teorema de los ceros, habrá por lo menos un $c \in (-x_0, x_0)$ tal que $P(c) = 0$.

Problema 4-24 Dado el teorema, si f y g son continuas en x_0, también lo son las funciones $f \pm g, fg$, y el corolario: si $f_1, \dots, f_n$ son todas continuas en x_0, también lo son $f_1 \pm \dots \pm f_n, f_1 \dots f_n$.

Pruebe: el polinomio $P(x)$ de grado m, esto es, una función de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m \; (a_m \neq 0)$$

con m entero no negativo y coeficientes reales, es función continua en todo punto x_0.

Solución. Debido a que la función $f(x) = x$ es obviamente continua en cada punto x_0, se sigue del teorema y corolario que lo mismo es verdad para $P(x)$.

Problema 4-25 Establezca la tercera condición de continuidad $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ en términos de los incrementos Δx y $\Delta y = \Delta f(x)$.

Solución. Dada una función $y = f(x)$, supongamos que la variable independiente x se varía de un valor original x_0 a un nuevo valor x_1. La cantidad $\Delta x = x_1 - x_0$ se llama el «incremento de la variable independiente x». Aquí Δx no debe tomarse como el producto de los símbolos Δ y x, sino como una sola entidad (se lee «delta x»). Sean $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$ los valores de la variable dependiente correspondientes a x_0 y x_1. La cantidad $\Delta y = y_1 - y_0$ se llama «incremento de la variable dependiente y». Análogamente, la cantidad $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ se llama «incremento de la función f (en x_0)». Obviamente Δy y Δf son iguales, pero una notación indica el símbolo usado para la variable dependiente, mientras la otra indica el símbolo usado a menudo para la función o «regla» que asocia y a x.

En la notación con incrementos, la tercera condición se indicaría en cualquiera de las siguientes maneras:

$$(a)\ \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$
$$(b)\ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$
$$(c)\ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Porque: sea $x = x_0 + \Delta x$ y así cuando $x \to x_0 \Delta x \to 0$ y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \qquad (a)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (c)$$

Problema 4-26 ¿Son continuas las siguientes funciones en cada punto del intervalo $[0, 2]$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Solución. $f(x)$ no, porque para $x_0 = 1$ no se cumple la segunda condición.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} 2x \quad = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) \text{ no existe.}$$

$g(x)$ es continua en todo punto $x_0 \in [0, 2]$:

a) $\forall x_0 \in [0, 2]$ $f(x_0)$ es real. *b)* $\forall x_0 \in [0,2]$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ existe. *c)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Así, para $x_0 = 1$, *a)* $f(1) = 1$

$$b)\ \left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1 \\ \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} x^2 \quad = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$c)\ \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$$

Problema 4-27 Si f y g son ambas discontinuas en x_0, ¿ocurre lo mismo con el producto fg? ¿Qué pasa si f es continua y g discontinua en x_0?

Solución. Si f y g son discontinuas en x_0, fg puede ser continua. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ si x es racional, $f(x) = -x$ si x es irracional y es discontinua en cualquier punto $x_0 \neq 0$, pero su cuadrado es continua en x_0. Por supuesto, el producto fg de dos funciones discontinuas puede ser discontinua $\left(x_0 = 0, f(x) = g(x) = \frac{1}{x}\right)$. Si f es continua y g discontinua en x_0, entonces fg puede ser continua $\left(\text{en } x_0 = 0, f(x) = x, g(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ o discontinua $\left(\text{en } x_0 = 0, f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x^2}\right)$.

Problema 4-28 Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x \text{ si } x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ A \operatorname{sen} x + B \text{ si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x \text{ si } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Elija los números A y B de manera que $f(x)$ sea continua en todas partes.

Solución. Debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi^+}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi^+}{2}} A \operatorname{sen} x + B = \lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} -2 \operatorname{sen} x = 2 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,

o sea,

$$A \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + B = 2 \tag{1}$$

y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} A \operatorname{sen} x + B = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi^+}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \cos x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, o sea,

$$A \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + B = 0 \tag{2}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} -A + B = 2 \\ A + B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = 1, A = -1$$

Problema 4-29 Investigue la continuidad de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 1 + x^2.$$

Solución. $g(x)$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbf{R}$ y f es continua en todo punto $g(x_0)$, y así, $f \circ g$ es continua en todo $x_0 \in \mathbf{R}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe y $f(x)$ no es continua en el punto $x_0 = 0$, y así $g \circ f$ no será continua en $x_0 = 0$.

Recuerde que $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ y $\lim (f \circ g)(x) = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$

Problema 4-30 *a*) Investigue la continuidad de la función $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \cos^{2n} x$.

b) Encuentre el incremento Δx de la variable independiente y el correspondiente incremento Δy de la función $y = 1/x^2$ si x se varía de 0,01 a 0,001.

Solución. *a*) $f(x)$ tiene una discontinuidad en cada punto $x = \pi(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ porque

$$f(x) = \begin{matrix} 0 \text{ si } x \neq n\pi \\ 1 \text{ si } x = n\pi \end{matrix}$$

b) $\Delta x = 0{,}001 - 0{,}01 = -0{,}009.$

Si $x = 0{,}01$, $\qquad y = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0{,}01)^2} = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$

Si $x = 0{,}001$, $\qquad y = \dfrac{1}{(0{,}001)^2} = \dfrac{1}{0{,}000001} = 1\,000\,000$

$$\Delta y = 1\,000\,000 - 10\,000 = 990\,000$$

Problema 4-31 Localice todos los puntos de discontinuidad para cada una de las siguientes funciones. Bosqueje el grafo de cada función:

$$a)\ f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}. \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } |x| < 1 \\ +1 \text{ si } |x| > 1 \\ \ \ 0 \text{ si } x = +1 \end{cases}$$

Solución. *a)* ± 2 son puntos de discontinuidad, ya que $f(\pm 2) = \frac{\pm 2}{4-4} = \infty$, es decir, $x_0 = \pm 2 \notin \mathscr{D}_f$. (Vea Fig. 4-10.)

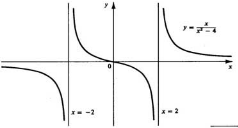
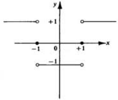


Figura 4-10



$$b)\ f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } |x| < 1 \\ +1 \text{ si } |x| > 1 \\ \ \ 0 \text{ si } x = \pm 1 \end{cases}$$ los puntos de discontinuidad son $\pm$ 1.

(Vea Fig. 4-11.)

Figura 4-11

Problema 4-32 ¿Para cuáles de las siguientes funciones f hay una función continua F con dominio **R** tal que $F(x) = f^*(x)$ para todo x en el dominio de f?

$$F(x) = f^*(x)$$

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. *b)* $f(x) = \frac{|x|}{x}$. *c)* $f(x) = 0$, x irracional.

d) $f(x) = \frac{1}{q}$, $x = \frac{p}{q}$ racional reducido a su mínima expresión.

Solución. *a)* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$.

$F(x) = x + 2$ para todo x.

b) Ninguna F, porque $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

c) $F(x) = 0$ para todo x.

d) Ninguna F, porque $F(a)$ debería ser 0 para a irracional, y entonces F no es continua en a si a es racional.

Problema 4-33 *a)* Suponga que f es una función que satisface $|f(x)| \le |x|$ para todo x. Muestre que f es continua en 0. (Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0.)

b) Dé un ejemplo de una función f tal que no es continua en cualquier $a \neq 0$.

c) Suponga que g es continua en 0 y $g(0) = 0$, y $|f(x)| \le |g(x)|$. Pruebe que f es continua en 0.

Solución. *a)* Claramente $\lim_{h\to 0} f(h) = 0$, porque $|h| < \delta \Rightarrow |f(h) - f(0)| = |f(h)| < \delta$.

b) Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

c) Observe que $|f(0)| \le |g(0)| = 0$, así que $f(0) = 0$. Debido a que g es continua en 0, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|g(h) - g(0)| = |g(h)| < \varepsilon$ para $|h| < \delta$. Luego si $|h| < \delta$, entonces $|f(h) - f(0)| = |f(h)| \le |g(h)| < \varepsilon$. Y, por tanto, $\lim_{h\to 0} f(h) = 0 = f(0)$.

Problema 4-34 Dé un ejemplo de una función f tal que f no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en cualquier punto.

Solución. Sea $f(x) = 1$ para x racional, y $f(x) = -1$ para x irracional.
$|f(x)| = 1$ para x racional e irracional.

Problema 4-35 Para cada número a, encuentre una función que sea continua en a, pero que no lo sea en cualquier otro punto.

Solución. Sea $f(x) = a$ para x irracional, y $f(x) = x$ para x racional.

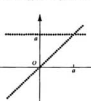


Figura 4-12

Problema 4-36 * *a)* Encuentre una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los otros puntos.

b) Encuentre una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, y en 0, pero continua en todos los otros puntos.

Solución. *a)* Sea f definida así: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \le 1. \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ *b)* Sea $f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

Nota. $\left[\frac{1}{x}\right]$ = parte entera de $\frac{1}{x}$.

Problema 4-37 • Suponga que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Pruebe que f es continua en a para todo a.

Solución. Observe que $f(x+0) = f(x) + f(0)$, y, por tanto, $f(0) = 0$. Ahora $\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} f(a) + f(h) - f(a) = \lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} f(h) - f(0) = 0$, porque f es continua en 0.

Problema 4-38 • *a)* Suponga que f no es continua en a. Pruebe que para algún número $\varepsilon > 0$ hay números x arbitrariamente próximos a a con $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Ilustre gráficamente.

b) Concluya que para algún número $\varepsilon > 0$ o hay números x arbitrariamente próximos a a con $f(x) < f(a) - \varepsilon$ o hay números x arbitrariamente próximos a a con $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

Solución. *a)* Es justamente otra forma de dar la definición: Si la condición no se cumpliera, entonces para cada $\varepsilon > 0$ tendríamos $|f(x) - f(a)| \le \varepsilon < 2\varepsilon$ para todo x suficientemente próximo a a, esto es, para todo x que satisface $|x - a| < \delta$ para algún $\delta > 0$. Si esto fuera verdad para todo ε, entonces f sería continua en a.

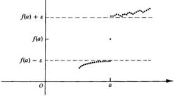


Figura 4-13

b) Si ninguna de estas condiciones se cumpliera, entonces para cada $\varepsilon > 0$ habría $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $f(x) \ge f(a) - \varepsilon$ para $|x - a| < \delta_1$ y $f(x) \le f(a) + \varepsilon$ para $|x - a| < \delta_2$. Si $|x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces $f(a) - \varepsilon \le f(x) \le f(a) + \varepsilon$, y así $|f(x) - f(a)| \le \varepsilon$. Debido a que esto sería verdad para todo $\varepsilon > 0$, se seguiría que f es continua en a.

Problema 4-39 *a)* Pruebe que si f es continua en a, también lo es $|f|$.

b) Pruebe que si f y g son continuas, entonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ también lo son.

c) Pruebe que cada función continua f puede escribirse $f = g - h$, donde g y h son negativas y continuas.

Solución. *a)* $\lim_{x\to a} |f|(x) = |\lim_{x\to a} f(x)|$, por el Problema 3-124 (límites).

$$= |f(a)| = |f|(a).$$

b) Se sigue de la parte *a)*, porque

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \quad \text{(vea Problema 3-124, límites).}$$

c) Sea $g = \max(f, 0)$ y $h = -\min(f, 0)$.

Problema 4-40 *a)* Pruebe que si f es continua en l y $\lim_{x \to a} g(x) = l$, entonces $\lim_{x \to a} f[g(x)] = f(l)$. (Se puede ir directamente a la definición, pero es más fácil considerar la función G con $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, y $G(a) = l$.)

b) Muestre que si no se asume la continuidad de f en l, entonces no es generalmente verdad que $\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$.

Nota. Pruebe $f(x) = 0$ para $x \neq l$, y $f(l) = 1$.

Solución. *a)* Obviamente G es continua en a, porque $G(a) = l = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} G(x)$. Por tanto, $f \circ G$ es continua en a por el teorema que dice: Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a. (Continuidad de funciones compuestas.) Por tanto,

$$f(l) = f[G(a)] = (f \circ G)(a) = \lim_{x \to a} (f \circ G)(x) = \lim_{x \to a} f[g(x)]$$

b) Sea $g(x) = l + x - a$ y $f(x) = \begin{cases} 0, x \neq l \\ 1, x = l \end{cases}$.

Entonces $\lim_{x \to a} g(x) = l$, y así $f\left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = f(l) = 1$; pero $g(x) \neq l$ para $x \neq a$, y así $\lim_{x \to a} f[g(x)] = \lim_{x \to a} 0 = 0$.

Problema 4-41 • *a)* Pruebe que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces hay una función g que es continua sobre $\mathbf{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Nota. Debido a que se tienen muchas alternativas, pruebe haciendo g constante sobre $]-\infty, a]$ y $[b, \infty[$.

b) Dé un ejemplo para mostrar que esta proposición es falsa si $[a, b]$ se remplaza por $]a, b[$.

Solución. *a)* Debido a que f es continua sobre $[a, b]$, los límites $\lim_{t \to a^+} f(t)$ y $\lim_{t \to b^-} f(t)$ existen. Sea

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{t \to a^+} f(t), & x \leq a \\ f(x), & a \leq x \leq b \\ \lim_{t \to b^-} f(t), & b \leq x \end{cases}$$

b) Sea $f(x) = 1/(x - a)$.

Problema 4-42 • *a)* Suponga que g y h son continuas en a y que $g(a) = h(a)$. $f(x)$ es $g(x)$ si $x \geq a$ y es $h(x)$ si $x \leq a$. Pruebe que f es continua en a.

b) Suponga que g es continua sobre $[a, b]$ y h es continua sobre $[b, c]$ y $g(b) = h(b)$. Sea $f(x) = g(x)$ para x en $[a, b]$ y $f(x) = h(x)$ para x en $[b, c]$. Muestre que f es continua sobre $[a, c]$.

Solución. *a)* El límite $\lim_{t \to 0} f(a + t)$ existe y es igual a $f(a) = g(a) = h(a)$, porque

$$\lim_{t \to 0^+} f(a + t) = \lim_{t \to 0^+} g(a + t) = g(a),$$

$$\lim_{t \to 0^-} f(a + t) = \lim_{t \to 0^-} h(a + t) = h(a).$$

b) f es continua en b por *a)*, y en cualquier $x \neq b$ en $[a, c]$, porque f concuerda con g o con h sobre algún intervalo alrededor de x.

Problema 4-43 • Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pero es $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una discontinuidad evitable en a.

a) Si $f(x) = \text{sen } 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una discontinuidad evitable en 0? ¿Qué ocurre si $f(x) = \text{sen } 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

b) Suponga que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$ y sea $g(x) = \lim_{x \to a} f(x)$. Pruebe que g es continua en a.

c) Sea $f(x) = 0$ si x es irracional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q está reducida a su mínima expresión. ¿Cuál es la función g definida por $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$?

d) Sea f una función con la propiedad de que cada punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que $\lim_{y \to x} f(y)$ existe para todo x, pero f puede ser discontinua en algunos números x. Defina $g(x) = \lim_{y \to x} f(y)$. Pruebe que g es continua.

Solución. *a*) No en el primer caso (vea el Problema 3-58). Sí en el segundo.

b) Tenemos $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x)$, porque $g(x) = f(x)$ para $x \neq a = g(a)$, por definición de $g(a)$.

c) $g(x) = 0$ para todo x.

d) Porque $g(a) = \lim_{y \to a} f(y)$; por definición, se sigue que para cualquier $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(y) - g(a)| < \varepsilon$ para $|y - a| < \delta$. Esto significa que

$$g(a) - \varepsilon < f(y) < g(a) + \varepsilon$$

para $|y - a| < \delta$. Luego si $|x - a| < \delta$, tenemos

$$g(a) - \varepsilon \leq \lim_{y \to x} f(y) \leq g(a) + \varepsilon$$

que muestra que $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon$ para todo x que satisface $|x - a| < \delta$. Luego g es continua en a.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Demuestre que la función $y = x^2$ es continua para cualquier valor del argumento x.

2. Demuestre que la función racional

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

es continua para todos los valores de x, a excepción de aquellos que anulan el denominador.

3. La función $f(x) = \text{arc tg} \frac{1}{x - 2}$ carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Puede elegirse el valor de $f(2)$ de tal forma que la función completada sea continua cuando $x = 2$? *Resp.:* No

4. La función $f(x)$ es indeterminada en el punto $x = 0$. Determine $f(0)$ de tal forma que $f(x)$ sea continua en este punto si:

a) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$. *Resp.:* $f(0) = \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$. *Resp.:* $f(0) = 2$

c) $f(x) = x \cot g\, x$. *Resp.:* $f(0) = 1$

5. Averigüe si son continuas las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1 + x^3}{1 + x}$. *Resp.:* *a*) $x = -1$, discontinuidad evitable.

b) $y = \dfrac{x}{|x|}$. *Resp.:* *b*) $x = 0$, discontinuidad esencial.

c) $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$. *Resp.:* c) $x = 0$, discontinuidad evitable. $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2 \ldots)$, puntos de discontinuidad infinita (polo).

d) $y = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$. *Resp.:* d) $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$, de discontinuidad polo (o infinita).

e) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. *Resp.:* e) $x = 0$, punto de discontinuidad evitable.

f) $y = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$. *Resp.:* f) $x = 1$, punto de discontinuidad esencial.

6. Averigüe si es continua la función $y = \begin{cases} x^2 \text{ cuando } x \leq 3 \\ 2x + 1 \text{ cuando } x > 3. \end{cases}$ Construya el grafo de esta función.

Resp.: $x = 3$ es un punto de discontinuidad esencial.

7. a) Dé un ejemplo que demuestre que la suma de dos funciones discontinuas puede ser una función continua. (Si f y g son discontinuas en x_0, ¿$f + g$ será continua o discontinua?)
b) Si f es continua y g discontinua en x_0, ¿cómo será $f + g$?

8. Demuestre que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene una infinidad de raíces reales.

9. ¿Qué elección (si la hay) de $f(0)$ hace continua en $x = 0$ a cada una de las siguientes funciones?:

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{2x}$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; c) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; f) $f(x) = \dfrac{\pi}{2 - x}$.

Resp.: a) $-\dfrac{3}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ninguna ; d) 0 ; e) 2 ; f) ninguna.

10. Encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 2)$; c) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2 - x}$;

d) $f(x) = x - [x]$; e) $g(x) = [x]f[-x]$; f) $h(x) = \dfrac{1}{x - [x]}$.

Nota. $[x]$ indica que se toma la parte entera de x; así $[3{,}14] = 3$, $[2{,}5] = 2$.

11. Sea $P(x)$ la distancia más corta entre un punto variable x del eje X y un punto cualquiera del conjunto $[0, 1] \cup [2, 3]$, o sea, de la unión de los intervalos cerrados $[0, 1]$ y $[2, 3]$.
En notación de conjuntos, $P(x) = \min \{|x - \xi| : \xi \in [0, 1] \cup [2, 3]\}$. Escriba una fórmula para $P(x)$. ¿Dónde es continua $P(x)$?

Nota. La distancia P_1P_2 entre dos puntos del eje X es $P_1P_2 = x_2 - x_1$ (coordenada del punto final menos coordenada del punto inicial).

Resp.: $P(x)$ está dada por

$$P(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3/2 \\ 2 - x & \text{si } 3/2 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

y es continua en todas partes.

12. Investigue la continuidad de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = x(1 - x^2)$$

Resp.: $f \circ g$ tiene discontinuidades en -1, 0 y 1 ; $g \circ f$ no tiene discontinuidades.

13. Investigue la continuidad de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = 1 + x - [x]$$

Resp.: $f \circ g$ y $g \circ f$ no tienen discontinuidades.

14. Una función f se define como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \le c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes. Si b y c son dadas, encuentre todos los valores de a (si existen) para los cuales f es continua en $x = c$.

Resp.: $a = (\operatorname{sen} c - b)/c$ si $c \neq 0$; si $c = 0$ no hay solución a menos que $b = 0$, en cuyo caso cualquier a serviría.

15. Resuelva el ejercicio anterior si f se define así:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & \text{si } x \le c \\ ax^2 + b & \text{si } x > c \end{cases}$$

Resp.: $a = (2 \cos c - b)/c^2$ si $c \neq 0$; si $c = 0$ no hay solución, a menos que $b = 2$, en cuyo caso cualquier a sirve.

16. Este ejercicio proporciona una prueba alterna de la continuidad de las funciones seno y coseno.

a) La desigualdad $|\operatorname{sen} x| < |x|$, válida para $0 < |x| < \pi/2$, se da como demostrada. Use esta desigualdad para probar que la función seno es continua en 0.
b) Use la parte *a)* y la identidad $\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$ para probar que el coseno es continuo en 0.
c) Use las fórmulas de adición para $\operatorname{sen}(x + h)$ y $\cos(x + h)$ para probar que el seno y el coseno son continuos en cualquier x real.

17. Sean f y g dos funciones definidas como sigue:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \text{ para todo } x, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Encuentre una fórmula (o fórmulas) para la función compuesta $h(x) = f[g(x)] = (f \circ g)(x)$. ¿Para qué valores de x es h continua?

Resp.:
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

18. Resuelva el Ejercicio 17 cuando f y g se definen así:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } |x| \le 2 \\ 2 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

Resp.:
$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \le |x| \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{de otro modo (para todos los otros, } x) \end{cases}$$

19. Resuelva el Ejercicio 17 cuando $h(x) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.

Resp.:
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

CAPITULO 5

La derivada

Definición. Dada una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f es derivable (o diferenciable) en $x_0 \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es convergente en x_0, y cuyo límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ llamamos derivada de f en x. Se designa por $f'(x_0)$, o $(Df)x_0$, o Dx_0, o $\left(\dfrac{d}{dx} f\right)_{x_0}$.

Los límites $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$ se llaman las derivadas a derecha e izquierda. Varias formas equivalentes del cociente de diferencias se emplean en la práctica para determinar si una función es derivable o no. Por ejemplo, si hacemos $h = x - x_0$ se tiene que $x = h + x_0$, de manera que el cociente de diferencias de f en x_0 se puede escribir como

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La convergencia del término de la izquierda en x_0 implica la convergencia del cociente de diferencias en $h = 0$, y recíprocamente, puesto que los límites son idénticos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si se designa por Δx la diferencia $x - x_0$, y por Δf la diferencia $f(x) - f(x_0)$ o $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; entonces se pueden escribir otras formas de la derivada que son equivalentes

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Cuando se emplea la notación h o Δx, comúnmente se omite el subíndice cero de x_0 y simplemente se escribe

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para calcular la derivada de una función efectúe los siguientes pasos:

1. Incremente la variable independiente de la función.
2. Calcule el incremento de la función.
3. Halle el cociente diferencial.

4. Transforme el cociente de diferencias de manera que responda al álgebra de los límites (o a la regla en cadena para límites, o al teorema del sandwich) o también demuestre que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ no es convergente en x_0.

5. Cuando el cociente de diferencias haya adquirido la forma que se pide en el paso anterior aplique el operador $\lim_{x \to x_0}$ (o $\lim_{h \to 0}$, o $\lim_{\Delta x \to 0}$) al resultado, y el límite, si existe, es la derivada de la función pedida.

La definición simplemente iguala la idea de derivabilidad de f en x_0 con el concepto de prolongación continua del cociente de diferencias en x_0. Porque si escribimos $Q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ el dominio de $Q(x)$ es $\mathscr{D}_f - \{x_0\}$; por tanto, x_0 es una discontinuidad defectuosa.

Si $Q(x)$ es convergente en x_0, entonces x_0 es una discontinuidad evitable de $Q(x)$ y se obtiene la prolongación continua $Q^*(x)$ definida así:

$$Q^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \in \mathscr{D}_f - \{x_0\} \\ f(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-1 Halle la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 3x + 2$; *b)* $u = t/(1 + t)$; *c)* $y = \sqrt{x}$; *d)* $y = 2/x$; *e)* $y = x^n$; n entero positivo.

Solución. *a)* $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 2$

$$y = x^2 + 3x + 2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3), \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

b) $u + \Delta u = \frac{t + \Delta t}{1 + t + \Delta t}$

$$\Delta u = \frac{t + \Delta t}{1 + t + \Delta t} - \frac{t}{1 + t} = \frac{(t + \Delta t)(1 + t) - t(1 + t + \Delta t)}{(1 + t)(1 + t + \Delta t)} = \frac{\Delta t}{(1 + t)(1 + t + \Delta t)}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1}{(1 + t)(1 + t + \Delta t)}; \quad \frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1}{(1 + t)^2}$$

c) $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$; $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}; \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) $y + \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x}$; $\Delta y = \frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x} = \frac{-2\Delta x}{(x + \Delta x)x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{(x + \Delta x)x} \quad \therefore y' = \frac{-2}{x^2}$$

e) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right] \therefore f'(x) = nx^{n-1}$

Problema 5-2 *a)* Calcule la derivada de $f(x) = 3x^2 + 5$, empleando las diferentes formas del cociente, en $x = 2$.

b) Si $f(x) = x^{2/3}$, halle $f'(x)$.

Solución. *a)* Forma $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 5] - [3(2)^2 + 5]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 - 12 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\Delta x) = 12$$

Forma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 5) - 17}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} =$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 3 \lim_{x \to 2} (x + 2) = 12$$

b) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}][(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}} = \frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3}x^{2/3} + x^{4/3}} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

Problema 5-3 Si f es la prolongación continua de $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en el origen, muestre que f es derivable en el origen y que $f'(0) = 0$.

Solución. Como por el teorema del sandwich $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \to 0$ si $x \to 0$, se tiene que $f(0) = 0$. Entonces

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Problema 5-4 Muestre que la función $y = |x|$ no es derivable en el origen.

Solución. La definición de la función muestra que $y = x$ si $x \geq 0$ y $y = -x$ si $x < 0$. Para hallar su derivada en $x_0 = 0$ se tiene $\Delta y = \Delta x$ si $\Delta x > 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \text{ Para } \Delta x < 0, \Delta y = -\Delta x \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Entonces $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ no existe, aunque $\Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$. Como $\Delta y \to 0$ si $x \to 0$, $y = |x|$ es continua en $x = 0$.

Problema 5-5 *a)* Muestre que $y = \operatorname{tg} x$ es derivable en todo punto de su dominio y calcule su derivada. *b)* Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ para todo x para el cual $\operatorname{sen} x > 0$.

Solución. *a)* Sean $x, x + h \in \mathscr{D}_f$. Como $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = (1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B) \operatorname{tg}(A - B)$. Si hacemos $A = x$ y $B = x + h$ se tiene

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = (1 + \operatorname{tg}(x+h)\operatorname{tg} x)\frac{\operatorname{tg} h}{h} \quad \therefore \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}[1 + \operatorname{tg}(x+h)\operatorname{tg} x] \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

b)
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(x + \Delta x)} - \sqrt{\operatorname{sen} x}}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\left(\sqrt{\operatorname{sen}(x + \Delta x)} + \sqrt{\operatorname{sen} x}\right) \Delta x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\left(\sqrt{\operatorname{sen}(x + \Delta x)} + \sqrt{\operatorname{sen} x}\right) \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x + \Delta x)} + \sqrt{\operatorname{sen} x}} \left(\operatorname{sen} x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right)$$

Si $\Delta x \to 0$,
$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x + \Delta x)} + \sqrt{\operatorname{sen} x}} \left(\operatorname{sen} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) \to$$

$$\to \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} (\operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1)$$

Así, $f'(x) = \frac{1}{2} \cos x / \sqrt{\operatorname{sen} x}$ si $\operatorname{sen} x > 0$.

Continuidad y derivabilidad

Teorema. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Entonces

a) f es derivable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0. *b)* f es continua en $x_0 \Rightarrow f$ no sea derivable en x_0.

Demostración. *a)* La hipótesis de que f es derivable en x_0 dice que el cociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es convergente en x_0. Como

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = [f(x) - f(x_0)] \frac{x - x_0}{x - x_0} + f(x_0) \tag{5-1}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0), \; x \neq x_0 \tag{5-2}$$

La convergencia de $f(x)$ resulta de la convergencia de $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$, $x - x_0$ y $f(x_0)$ en (5-2), según el álgebra de los límites. En realidad se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0)$$

o, en otras palabras,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Por tanto, el límite de la función es el valor funcional en el punto de aproximación. Según la definición de continuidad, la parte *a*) queda así demostrada.

Demostración. *b*) La da el contraejemplo $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$, porque no es derivable en $x_0 = 0$ porque el cociente $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ no converge en $x_0 = 0$.

Ejemplo. La prolongación continua de x sen $(1/x)$ en $x_0 = 0$ no es derivable en x_0 porque el cociente

$$\frac{x \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

no converge en $x_0 = 0$.

Derivacion de funciones algebraicas

Teorema. (Algebra de las derivadas). Sean f, g y $y = c$ funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivables en $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Las funciones $y = c$, $f + g$, cg (c real), fg, $1/g$ y f/g son derivables en x_0 con la restricción $g(x_0) \neq 0$ en $1/g$ y f/g. Se tienen las siguientes reglas:

1. $y' = 0$.
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3. $(cg)'(x_0) = cg'(x_0)$.
4. $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.
5. $(1/g)'(x_0) = \dfrac{-1}{[g(x_0)]^2}\, g'(x_0)$ si $g(x_0) \neq 0$.
6. $(f/g)'(x_0) = \dfrac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ si $g(x_0) \neq 0$.

Demostración. En resumen, la demostración consiste en formar: *a*) los cocientes de diferencias para cada una de las seis funciones; *b*) efectuar el cambio de forma en cada uno de los cocientes para que sean de la forma $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$; *c*) pasar el límite, observando que los límites de los cocientes en el punto dado son las derivadas.

1. $(c)' = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c - c}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0.$

2. $$(f + g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

3. $$(cf)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0).$$

4. $$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

5. $$(1/g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{[g(x_0)]^2}\, g'(x_0).$$

6. $$(f/g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - g(x)g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)[f(x) - f(x_0)] - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$$
$$= \left[\lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] \bigg/ \lim_{x\to x_0} g(x)g(x_0) =$$
$$= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ si } g(x_0) \neq 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-6 Calcule ahora la derivada de: *a)* $y = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$; y *b)* $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$.

Solución. *a)* $y' = D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) = D_x(7x^4) - D_x(2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) = 28x^3 - 6x^2 + 8.$
b) $f'(x) = D_x[(2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)] = (2x^3 - 4x^2)D_x(3x^5 + x^2) + (3x^5 + x^2)D_x(2x^3 - 4x^2) =$
$= (30x^7 - 60x^6 + 4x^2 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3.$

Problema 5-7 Calcule la derivada de

$$a)\ y = \frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}. \quad b)\ y = (x^2 + 1)[(x^2 + 2)(x^2 + 3)].$$

Solución. *a)* $$y' = \frac{(x^2 - x + 4)\dfrac{d}{dx}(3x + 1) - (3x + 1)\dfrac{d}{dx}(x^2 - x + 4)}{(x^2 - x + 4)^2} =$$
$$= \frac{(x^2 - x + 4)(3) - (3x + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 4)} = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 - x + 4)^2}.$$

b) $$y' = (x^2 + 1)\frac{d}{dx}[(x^2 + 2)(x^2 + 3)] + [(x^2 + 2)(x^2 + 3)]\frac{d}{dx}(x^2 + 1) =$$
$$= (x^2 + 1)[(x^2 + 2)2x + (x^2 + 3)2x] + [(x^2 + 2)(x^2 + 3)]2x =$$
$$= 2x[(x^2 + 1)(x^2 + 2) + (x^2 + 1)(x^2 + 3) + (x^2 + 2)(x^2 + 3)].$$

Problema 5-8 Demuestre la regla general de adición

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f'_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Solución. Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f'_i$, $1 \in S$, puesto que $\left(\sum_{i=1}^{1} f_i\right)' = f'_1$.

Supongamos que $n \in S$ y que para este entero se verifica la fórmula. Ahora,

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right)' = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1}\right)' = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' + f'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} f'_i + f'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} f'_i$$

entonces $n + 1 \in S$. Luego como $1 \in S$ y ($n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$) esto muestra que S es un conjunto inductivo y, por tanto, contiene todos los enteros.

Derivación de las funciones trigonométricas

Teorema. Muestre que las funciones circulares son derivables en todo punto de su dominio y que sus derivadas son: 1, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$; 2, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$; 3, $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$; 4, $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$; 5, $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$; 6, $(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

Demostración. En esta demostración conviene recordar las fórmulas

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \text{ y } \cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

1. $$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} - \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h} \right] =$$
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = \cos x \cdot 1 - \operatorname{sen} x \cdot 0 = \cos x.$$

2. $$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos x \cos h - \cos x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right] = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$
$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x.$$

3. $(\operatorname{tg} x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cdots}{h} = \ldots = \sec^2 x$ (completarla).

4. $(\operatorname{cosec} x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} = \ldots = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$ (completarla).

5. $(\sec x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \ldots = \sec x \operatorname{tg} x$ (completarla).

6. $(\operatorname{cotg} x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x}{h} = \ldots = -\operatorname{cosec}^2 x$ (completarla).

Problema 5-9 *a)* Calcule la derivada de $y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$; *b)* $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}{\cos x}$; *c)* $y = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

Solución. *a)* $y' = \operatorname{sen} x (\operatorname{tg} x)' + \operatorname{tg} x (\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x \sec^2 x + \operatorname{tg} x \cos x.$

b) $$y' = \cos x \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)' - (\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x (\sec^2 x + \cos x) - (\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \sec^3 x + 1 + \sec x \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \sec^3 x + \sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x.$$

c) $$y' = \frac{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)' - (1 + \operatorname{tg} x)(-\operatorname{tg} x)'}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} =$$
$$= \frac{(1 - \operatorname{tg} x)\sec^2 x - (1 + \operatorname{tg} x)(-\sec^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = \frac{2\sec^2 x}{(1 - \operatorname{tg} x)^2}.$$

Teorema. Para todo número racional r, $f(x) = x^r$ es derivable en todo punto $x_0 \in \mathscr{D}_f - \{0\}$ y en $x_0 = 0$ si $r \geq 1$ ý $f'(x_0) = rx_0^{r-1}$.

Demostración. Caso 1. $r = n$, entero positivo. La demostración se dio en el Problema 5-6.

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-1-i} \to \sum_{i=0}^{n-1} x_0^{n-1} = nx_0^{n-1} \text{ cuando } x \to x_0 \tag{5-3}$$

Por continuidad del polinomio $\sum_{i=0}^{n-1} x^i x_0^{n-1-i}$ para todo $x_0 \in \mathbf{R}$. Así de (5-3) se tiene que

$$(D_x x^r)_{x_0} = rx_0^{r-1}$$

si r es un entero positivo.

Caso 2. $r = 1/n$, n entero positivo. Empleando los resultados del caso (5-3), sea $x_0 \neq 0$; entonces, por la regla en cadena de los límites y según la continuidad de la función raíz n-ésima,

$$\frac{x^{1/n} - x_0^{1/n}}{x - x_0} = \frac{1}{F^*(x^{1/n})} \to \frac{1}{F^*(x_0^{1/n})} = \frac{1}{n(x_0^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} x_0^{1/n-1} \text{ con } F^*(u) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{u^n - x^0}{u - x_0^{1/n}} \text{ si } u \neq x_0^{1/n} \\ (D_u u^n) x_0^{1/n} \text{ si } u = x_0^{1/n} \end{cases} \tag{5-4}$$

es la prolongación continua de $F(u) = (u^n - x_0)/(u - x_0^{1/n})$ en $u = x_0^{1/n}$.

Así, por (5-4), se tiene que $(D_x x^r)_{x_0} = rx_0^{r-1}$ si $x_0 \neq 0$ y $r = 1/n$.

Caso 3. $r = -p/q$, con p y q enteros positivos. La expresión $\dfrac{x^{-p/q} - x_0^{-p/q}}{x - x_0}$ con $t = x_0^{-1/q}$ y $\tau = x^{-1/q}$ se transforma en

$$\frac{x^{-p/q} - x_0^{-p/q}}{x - x_0} = \frac{\tau^p - t^p}{\tau^{-q} - t^{-q}} = \frac{(\tau^p - t^p)(t\tau)^q}{t^q - \tau^q} = -\frac{(\tau^{p-1} + \tau^{p-2}t + \ldots + t^{p-1})(\tau t)^q}{(\tau^{q-1} + \tau^{q-2}t + \ldots + t^{q-1})}$$

tomando el límite cuando $\tau \to t$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^r) = -\frac{pt^{p-1}t^{2q}}{qt^{q-1}} = rt^{p+q} = rx^{-p/q-1} = rx^{r-1}$$

Caso 4. $r = p/q$, p y q enteros positivos. Empleando la sustitución $t = x_0^{1/q}$ y $\tau = x^{1/q}$, la expresión $\dfrac{x^{p/q} - x_0^{p/q}}{x - x_0}$ se transforma en

$$\frac{\tau^p - t^p}{\tau^q - t^q} = \frac{\tau^{p-1} + \tau^{p-2}t + \ldots + t^{p-1}}{\tau^{q-1} + \tau^{q-2}t + \ldots + t^{q-1}}$$

Tomando el límite cuando $\tau \to t$ se obtiene

$$\frac{pt^{p-1}}{qt^{q-1}} = r\frac{(x_0^{1/q})^{p-1}}{(x_0^{1/q})^{q-1}} = rx_0^{p/q-1} = rx_0^{r-1}$$

Caso 5. $r = 0$ y $x_0 \neq 0$, entonces $f(x) = x^0 = 1$. En este caso, $f'(x) = 0$.

Caso 6. Si $x = 0$, r debe ser positivo, porque $f(0)$ no está definido si $r \leq 0$.

$$r > 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^r - 0}{x - 0} = 0. \text{ Si } r > 1, f'(0) = 0$$

Si se consideran funciones del tipo sen (cos x), no es posible calcular su derivada por los métodos conocidos hasta ahora. Por tanto, necesitamos el siguiente teorema que resuelve este tipo de dificultad.

Derivación en cadena

Teorema. (Derivación de funciones compuestas). Sean f y g dos funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; g derivables en x_0 y f derivable en $u_0 = g(x_0)$.

La función compuesta $f \circ g$ es derivable en x_0, y

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0) \text{ o } \frac{dF}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{dg}{dx} \text{ con } F(x) = f[g(x)]$$

Demostración. Definamos la función $F(x)$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f[g(x_0 + h)] - f[g(x_0)]}{g(x_0 + h) - g(x_0)} & \text{si } g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0 \\ f'[g(x_0)] & \text{si } g(x_0 + h) - g(x_0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a mostrar que $F(x)$ es continua en 0. Cuando h es pequeño, $g(x_0 + h) - g(x_0)$ es pequeño, por tanto, $g(x_0 + h) - g(x_0)$ no es cero, cuando $F(h)$ está cercano a $f'[g(x_0)]$; y si es cero, es igual a $f'[g(x_0)]$. A continuación damos la traducción de este razonamiento intuitivo.

Se sabe que f es derivable en $g(x_0)$. Es decir, $\displaystyle\lim_{k \to 0} \frac{f[g(x_0) + k] - f[g(x_0)]}{k} = f'[g(x_0)]$.

Así, si $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que para todo k,

$$\text{si } 0 < |k| < \delta', \text{ entonces } \left| \frac{f[g(x_0)] + k - f[g(x_0)]}{k} - f'[g(x_0)] \right| < \varepsilon \qquad (5\text{-}5)$$

Como g es derivable en x_0, es continua en x_0, por tanto, existe $\delta > 0$ tal que para todo h

$$\text{si } |h| < \delta, \text{ entonces } |g(x_0 + h) - g(x_0)| < \delta' \qquad (5\text{-}6)$$

Ahora considere cualquier h con $|h| < \delta$. Si $k = g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0$, entonces

$$F(h) = \frac{f[g(x_0 + h)] - f[g(x_0)]}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{f[g(x_0) + k] - f[g(x_0)]}{k}$$

De (5-6) tenemos que $|k| < \delta'$ y, por tanto, de (5-5), $|F(h) - f'[g(x_0)]| < \varepsilon$.

Por otra parte, si $g(x_0 + h) - g(x_0) = 0$, entonces $F(h) = f'[g(x_0)]$, lo cual nos asegura que $|F(h) - f'[g(x_0)]| < \varepsilon$. En otras palabras, hemos demostrado que $\lim_{k \to 0} F(h) = f'[g(x_0)]$, es decir, F es continua en 0.

Si $h \neq 0$, se tiene que $\dfrac{f[g(x_0 + h)] - f[g(x_0)]}{h} = F(h) \cdot \dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$. Por tanto,

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f[g(x_0 + h)] - f[g(x_0)]}{h} = \lim_{h \to 0} F(h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Problema 5-10 Calcule la derivada de las siguientes funciones: *a*) $y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$; *b*) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; *c*) $y = t^5 \operatorname{sen}(3t + 5)$; *d*) $y = A \operatorname{sen}(\omega t + C) + B \cos(\omega t + C)$; *e*) $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$; *f*) $y = u^3 + 3u - 1$ y $u = x^2 + x - 4$.

Solución. *a*) Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow y' = D_u \operatorname{sen} u \, D_x u = \cos u \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

b) Sea $y = \sqrt{u}$ y $u = x + \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

c) $y' = t^5[\operatorname{sen}(3t + 5)' + (t^5)' \operatorname{sen}(3t + 5) = 3t^5 \cos(3t + 5) + 5t^4 \operatorname{sen}(3t + 5)$.

d) $y' = A \cos(\omega t + C) D_t(\omega t + C) + B[-\operatorname{sen}(\omega t + C) D_t(\omega t + C)] = \omega[A \cos(\omega t + C) - B \operatorname{sen}(\omega t + C)]$.

e)
$$y' = \frac{1}{2}\{1 + [1 + (1 + x)^{1/2}]^{1/2}\}^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\{1 + [1 + (1 + x)^{1/2}]^{1/2}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{1 + [1 + (1 + x)^{1/2}]^{1/2}\}^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}[1 + (1 + x)^{1/2}]^{-1/2} \frac{d}{dx}[1 + (1 + x)^{1/2}] =$$
$$= \frac{1}{8}\{1 + [1 + (1 + x)^{1/2}]^{1/2}\}^{-1/2} [1 + (1 + x)^{1/2}]^{-1/2} (1 + x)^{-1/2}.$$

f)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^3 + 3u - 1) \frac{d}{dx}(x^2 + x - 4) = (3u^2 + 3)(2x + 1) =$$
$$= [3(x^2 + x - 4)^2 + 3](2x + 1).$$

Derivada de la función recíproca

Recuerde que si f es una biyección de E en F, el conjunto $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$ se llama función recíproca de f.

Teorema. Sea f la función recíproca de g. Si g es derivable en $f(x_0)$ y $g'[f(x_0)] \neq 0$, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = \dfrac{1}{g'[f(x_0)]}$.

Demostración. Como $f = g$, entonces $g[f(x)] = x$. Al derivar ambos lados de la igualdad y empleando la regla en cadena, se obtiene $1 = g'[f(x_0)] \cdot f(x_0)$, $\therefore f'(x_0) = 1/g'[f(x_0)]$.

Derivadas de orden superior

Decimos que una función es dos veces derivable en un punto dado si, y solamente si, la función derivada es derivable en el punto dado; la derivada se llama segunda derivada y se representa por $f''(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ o $D_x^2 f = D_x(D_x f)$ o $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

En general, para $n \geq 2$ la derivada enésima se define por recurrencia como la derivada de la derivada $(n - 1)$ y se representa por $f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$ o $D_x^n f = D_x(D_x^{n-1} f)$ o $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Problema 5-11 *a)* Halle la derivada enésima de

$$y = \text{sen}\, x; \quad b)\ y = x^n; \quad c)\ y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Solución. *a)* $y' = \cos x$; $y'' = -\text{sen}\, x$; $y''' = -\cos$; $y^{IV} = \text{sen}\, x, \ldots$

Esto sugiere que $D_x^{(n)}(\text{sen}\, x) = \text{sen}\left(x + k\,\dfrac{n}{2}\right)$, fórmula que se debe demostrar por inducción.

b) $y' = nx^{n-1}$; $by'' = n(n-1)x^{n-2}$; $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$; etc. Esto conduce a la fórmula:

$$D_x^k x^n = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \le n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$ la cual se debe probar por inducción.

c) $y' = 9x^2 - 4x + 3$; $y'' = 18x - 4$; $y''' = 18$; $y^{IV} = 0$, por tanto, $y^{(n)} = 0$ para $n \ge 4$.

Derivación implícita

Dadas dos funciones $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente la función f si $F(x, y) = 0$ para todo x en el dominio de f.

Ejemplo. Sea $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Entonces la condición $F[x, f(x)] = x^2 + [f(x)]^2 - 1 = 0$ para todo x en el dominio de f se cumple si f es

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}\,, & 1/2 \le x < 0 \\ -\sqrt{1 - x^2}\,, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Los grafos de estas funciones están dados en la Figura 5-1.

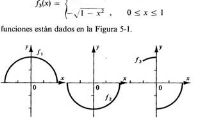


Figura 5-1

Según la definición de función definida implícitamente, las funciones f_1, f_2 y f_3 están definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

No toda función $F(x, y)$ define a $y = f(x)$ como una función implícita. Por ejemplo, no existen parejas ordenadas (x, y) que verifiquen la ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$$

En la práctica, la derivación implícita se trata de la manera siguiente: se supone que el conjunto solución de $F(x, y) = 0$ contiene una función derivable f en $\mathscr{D}_f$. Entonces $x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow F[x, f(x)] = 0$.

Si $g(x) = F[x, f(x)]$ es una función compuesta de funciones derivables, se puede aplicar el álgebra de las derivadas y la regla en cadena para calcular $g'(x)$. Pero $g(x) = 0$ sobre $\mathscr{D}_f$ implica que $g'(x) = 0$ sobre $\mathscr{D}_f$. Como g' contendrá la derivada deseada $f'(x)$ como factor, se puede resolver para $f'(x)$ en términos de $f(x)$ y otros valores conocidos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-12 Halle la derivada de cualquier función derivable f en el conjunto solución de $x^2 + 3xy^2 - 4 = 0$.

Solución. Para todo $x \in \mathscr{D}_f$, $x^2 + 3xf^2(x) - 4 = 0$, entonces la función $g = x^2 + 3xf^2(x) - 4$ es derivable en el dominio de f y es igual a cero. Así, $g' = 0$ sobre $\mathscr{D}_f$.

$$D_x(x^2 + 3xf^2_{(x)} - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3\,D_x[xf^2(x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)[x(2f(x)f'(x)) + f^2(x)] = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x + 3f^2(x)}{6xf(x)}$$

porque $x \neq 0$ y $f(x) \neq 0$.

Problema 5-13 Halle y'' y y''' de $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Solución. $D_x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2\,y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{y + \dfrac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \quad \text{porque } x^2 + y^2 = 1$$

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{y^3}\right)' = +\frac{3y'}{y^4} = \left(+\frac{3}{y^4}\right)\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}.$$

Problema 5-14 Si $x^3y - xy = y^3$, muestre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

Solución. Derivando con respecto a x: $3x^2 - x\dfrac{dy}{dx} - y = 3y^2\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - y}{3y^2 + x}$.

Derivando con respecto a y: $3x^2\dfrac{dx}{dy} - x - y\dfrac{dx}{dy} = 3y^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3y^2 + x}{3x^2 - y}$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{3y^2 + x} = \frac{1}{\dfrac{3y^2 - x}{3x^2 - y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

Problema 5-15 *a)* Si $x^3y - 4xy^2 = y + x^2$, halle y'; *b)* halle y' y y'' si $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solución. *a)* Derivando se tiene: $x^3\dfrac{dy}{dx} + y3x^2 - 4x \cdot 2y\dfrac{dy}{dx} - 4y^2 = \dfrac{dy}{dx} + 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 8xy - 1)\frac{dy}{dx} = -3x^2y + 4y^2 + 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y + 4y^2 + 2x}{x^3 - 8xy - 1}$$

b) $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-y^{1/3}/x^{1/3}$

$$y''=-\frac{x^{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)y^{-2/3}y'-y^{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}}{x^{2/3}}=-\frac{x^{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)y^{-2/3}\left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)-y^{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}}{x^{2/3}}=$$

$$=\frac{1}{3}(x^{-2/3}y^{-1/3}+x^{-4/3}y^{1/3})$$

Derivación de ecuaciones paramétricas

Definición. Si las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva están dadas por las funciones $x = f(u)$ y $y = g(u)$, de una tercera variable o parámetro u, las ecuaciones $x = f(u)$ y $y = (u)$ se llaman las ecuaciones paramétricas de la curva.

La primera derivada está dada por la fórmula

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/du}{dx/du}$$

porque $\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du}$, según el teorema de la derivación en cadena.

La segunda derivada está dotada por la fórmula

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

Problema 5-16 Si $y = t^3 + 2t^2 + 3t + 1$; $x = t^2 + t + 3$, halle $\frac{dy}{dx}$.

Solución. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(t^3+2t^2+3t+1)}{\frac{d}{dt}(t^2+t+3)}=\frac{3t^2+4t+3}{2t+1}$$

Problema 5-17 *a)* Si $y = t^3 + 1$; $x = t^2 + 3$, halle y'''; *b)* si $y=\frac{1}{u-1}$; $x=\frac{u}{u^2-1}$, halle y''.

Solución. *a)* $$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t;\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right)\frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2}\ \frac{1}{2t}=\frac{3}{4t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}t^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{3}{4}t^{-2}\frac{1}{2t}=-\frac{3}{8t^3}.$$

b) $$\frac{dy}{du}=-(u-1)^{-2};\ \frac{dx}{du}=\frac{(u^2-1)\cdot 1-u\cdot 2u}{(u^2-1)^2}=-\frac{u^2+1}{(u^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(u-1)^{-2}}{-\frac{u^2+1}{(u^2+1)^2}}=\frac{(u+1)^2}{u^2+1};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\ \frac{(u+1)^2}{u^2+1}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{(u^2+1)2(u+1)-(u+1)^2 2u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{du}}=$$

$$=-2\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2}\left(-\frac{(u^2-1)^2}{u^2+1}\right)=2\frac{(u^2-1)^3}{(u^2+1)^3}.$$

Aplicaciones geométricas de la derivada

Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con derivada $f'(x_0)$ en $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Para obtener la forma analítica de la recta tangente al grafo de f en $P_0 = (x_0, f(x_0))$, considere el punto $P(x, f(x))$ sobre el grafo de f con $x \neq x_0$. (Vea Fig. 5-2.)

La recta secante que pasa por P y P_0 tiene por pendiente a

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{5-7}$$

Hagamos que P se acerque a P_0 al aproximarse x a x_0. Por definición sabemos que el límite de (5-7) cuando $x \to x_0$ es la derivada $f'(x_0)$, la cual dice que el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por P_0 es la derivada de f calculada en la proyección de P_0 sobre el eje de las x.

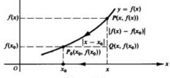


Figura 5-2

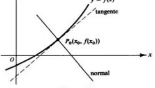


Figura 5-3

Definición. Si f es una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivable en x_0, se define la recta tangente al grafo de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ por

$$1 = \{(x, y) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ y } x \in \mathbf{R}\} \text{ o } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

La recta perpendicular a la tangente que pasa por x_0 recibe el nombre de normal a dicho grafo. (Vea Fig. 5-3.)

$$N = \{(x, y) : y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ y } x \in \mathbf{R}\} \text{ si } f'(x_0) \neq 0$$

$$N = \{(x, y) : x = x_0\} \text{ si } f'(x_0) = 0$$

Angulo entre dos grafos

Por ángulo formado entre los grafos de las funciones

$$y = f_1(x)$$
$$y = f_2(x)$$

en un punto común $P_0(x_0, y_0)$ (Fig. 5-4) se entiende el ángulo que forman entre sí las tangentes a estas curvas en el punto P_0.

Por la conocida fórmula analítica obtenemos:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$$

Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal

Por ser de interés en ecuaciones diferenciales, incluimos los siguientes conceptos relacionados con la tangente y la normal en coordenadas rectangulares.

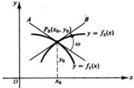


Figura 5-4

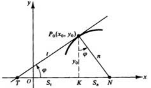


Figura 5-5

$t = TP_0$, llamado segmento tangente.
$S_t = TK$, subtangente.
$n = NP_0$, segmento normal.
$S_n = KN$, subnormal.

Como $KP_0 = |y_0|$ y $\operatorname{tg} \varphi = y'_0$, se tiene:

$$t = TP_0 = \left| \frac{y_0}{y'_0} \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$$

$$n = NP_0 = \left| y \quad \sqrt{1 + (y'_0)^2} \right|$$

$$S_t = TK = \left| \frac{y_0}{y'_0} \right|; \; S_n = |y_0 y'_0|$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 5-18 Halle las ecuaciones de tangente y normal a cada uno de los siguientes grafos en el punto indicado. *a)* $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ en $P(-2, -3)$; *b)* $y^3 = x^2 + 7$ en $P(1, 2)$; *c)* $y = x^{-2/3} - 3x^2 + x^{1/4} + 1$ en $P(1, 0)$; *d)* $y = \sqrt[5]{x^3 + 5}$ en $P(3, 2)$.

Solución. *a)* $[y']_P = [6x^2 + 6x]_P = 12.$

Tangente:

$$y + 3 = 12(x + 2); \quad 12x - y = -21$$

Normal:

$$y + 3 = -\frac{1}{12}(x + 2); \quad x + 12y = -38$$

b) $y = (x^2 + 7)^{1/3} \Rightarrow [y']_P = [1/3(x^2 + 7)^{-2/3} 2x]_P = 1/6.$

Tangente:

$$y - 2 = 1/6\,(x - 1); \quad x - 6y = -11$$

Normal:

$$y - 2 = -6(x - 1) \Rightarrow 6x + y = 8$$

c) $[y']_P = \left[-\frac{2}{3}x^{-5/3} - 6x + \frac{1}{4}x^{-3/4}\right]_P = -\frac{77}{12}$.

Tangente:

$$y = -\frac{77}{12}(x-1) \Rightarrow 77x + 12y = 77$$

Normal:

$$y = \frac{12}{77}(x-1) \Rightarrow 12x - 77y = 12$$

d) $[y']_P = \left[\frac{1}{5}(x^3+5)^{-4/5}3x^2\right]_P = \frac{27}{80}$.

Tangente:

$$y - 2 = \frac{27}{80}(x-3) \Rightarrow 27x - 80y = -79$$

Normal:

$$y - 2 = -\frac{80}{27}(x-3) \Rightarrow 80x + 27y = 294$$

Problema 5-19 Obtenga las ecuaciones de tangente y normal a $y = 2x^2 - 6x + 7$ en el punto P donde la pendiente de la tangente es 2.

Solución. $y' = 4x - 6 = 2 \Rightarrow x = 2$; $\therefore [y]_P = [2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7] = 3$.

Tangente:

$$y - 3 = 2(x-2) \Rightarrow 2x - y = 1$$

Normal:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x + 2y = 8$$

Problema 5-20 Halle el punto en que la normal a $y = x^2 - x$ en $P(-2, 6)$ corta la recta $2x + 5y = 5$.

Solución. $[y']_P = [2x - 1]_P = -5$

La normal es $y - 6 = 1/5(x + 2) \Rightarrow x - 5y = -32$.

Resolviendo la ecuación anterior simultáneamente con $2x + 5y = 5$ se obtiene $(-9, 4 \cdot 6)$.

Problema 5-21 Halle la recta tangente (*s*) al grafo de $f(x) = x^2$: *a*) que contienen el punto (3, 5); *b*) que tienen pendiente 1/2.

Solución. La recta tangente al grafo de $f(x) = x^2$ en $P(x_0, x_0^2)$ es

$$L = \{(x, y) : y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)\}$$

Para la parte *a*)

$$(3, 5) \in L \Leftrightarrow 5 = x_0^2 + 2x_0(3 - x_0)$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ o } x_0 = 5$$

Así, $P_0 = (1, 1)$ o $P_0 = (5, 25)$, entonces las rectas pedidas son $y = 1 + 2(x - 1)$ y $y = 25 + 10(x - 5)$.

b) $f'(x_0) = 2x_0 = 1/2 \Leftrightarrow x_0 = 1/4$. Por tanto, la tangente pedida es única, es decir, $\{(x, y) : y = 1/10 + 1/2(x - 1/4)\}$.

Problema 5-22 *a)* Halle los puntos sobre el grafo de $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 2$ en los cuales la pendiente es cero.

b) Halle los puntos sobre el grafo de $y = x \operatorname{sen} x$ en los cuales la pendiente es cero.

Solución. *a)* Como $y' = 3x^2 - 30x + 27 = 3(x - 1)(x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ o $x = 9$, los puntos pedidos son $(1, 11)$, $(9, -245)$.

b) Como $y' = x \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -x$, los puntos pedidos son los puntos sobre el grafo de $x \operatorname{sen} x$ que están alineados verticalmente con las intersecciones de los grafos de $\operatorname{tg} x$ y $-x$.

Problema 5-23 Halle las longitudes de subtangente, subnormal, tangente y normal de los siguientes grafos en los puntos indicados.

a) $y^2 = (x - 1)^3$ en $P(5, 8)$; *b)* $y = \sqrt[3]{x^2} - x^{\frac{1}{4}} + x^3 + 2$ en $P(1, 3)$; *c)* $y = x/(x - 2)$ en $P(3, 3)$.

Solución. *a)* $2yy' = 3(x - 1)^2 \Rightarrow [y']_P = \left[\dfrac{3(x - 1)^2}{2y}\right]_P = 3$

$$\frac{f(5)}{f'(5)} = \frac{8}{3} = \text{subtangente}; f(5) \cdot f'(5) = 8 \cdot 3 = 24 = \text{subnormal}.$$

$$\text{Tangente} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{10}. \text{ Normal} = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}.$$

b) $[y']_P = \left[\dfrac{2}{3}x^{-1/3} - \dfrac{1}{4}x^{-3/4} + 3x^2\right]_P = \dfrac{41}{12}$.

$$\text{Subtangente} = 3 : \frac{41}{12} = \frac{36}{41}. \text{ Subnormal} = 3 \cdot \frac{41}{12} = \frac{41}{4}.$$

$$\text{Tangente} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{36}{41}\right)^2} = \frac{15}{41}\sqrt{73}. \text{ Normal} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{41}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{73}.$$

c) $y' = \dfrac{(x - 2) - x}{(x - 2)^2} = \dfrac{-2}{(x - 2)^2} \Rightarrow f'(3) = -2, f(3) = 3.$

$$\text{Subtangente} = \frac{3}{-2}. \text{ Subnormal} = 3(-2) = -6.$$

$$\text{Tangente} = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}. \text{ Normal} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} \quad 3\sqrt{5}.$$

Problema 5-24 *a)* Muestre que la ecuación de la tangente de pendiente $m \neq 0$ a la parábola $y^2 = 4px$ es $y = mx + p/m$. *b)* Muestre que la ecuación de la tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

Solución. *a)* $y' = 2p/y$. Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia; entonces $y_0^2 = 4px_0$, y $m = 2p/y_0$.

Entonces $y_0 = 2p/m$, $x_0 = (1/4)\dfrac{y_0^2}{p} = p/m^2$ y la ecuación de la tangente es $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$ o $y = mx + p/m$.

b) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. En P_0, $m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ y la ecuación de la tangente es $y - y_0 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$ o $b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$.

Problema 5-25 Muestre que un punto $P_0(x_0, y_0)$ sobre la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, la recta tangente biseca el ángulo formado por los radios focales de P_0.

Solución. En P_0 la pendiente de la tangente a la hipérbola es b^2x_0/a^2y_0, las pendientes de los radios focales P_0F' y P_0F son $y_0/(x_0 + c)$ y $y_0/(x_0 - c)$ respectivamente. (Vea Fig. 5-6.)

$$\text{Ahora tg } \alpha = \frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + c}} = \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} =$$

$$= \frac{b^2}{cy_0} \text{ como } b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2 \text{ y } a^2 + b^2 = c^2.$$

$$\text{Y,} \quad \text{tg } \beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - c} - \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}.$$

Entonces, puesto que $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

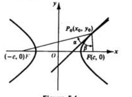


Figura 5-6

Problema 5-26 Halle los ángulos de intersección de las curvas (1) $y^2 = 4x$ y (2) $2x^2 = 12 - 5y$.

Solución. *a*) Los puntos de intersección de las curvas son $P_1(1, 2)$ y $P_2(4, -4)$.

b) Para (1) $y' = 2/y$; para (2) $y' = -4x/5$. En $P_1(1, 2)$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -4/5$; en $P_2(4, -4)$ $m_1 = -1/2$ y $m_2 = -16/5$.

c) En P_1: $\text{tg } \theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \dfrac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ y $\theta = 83° 40'$ es el ángulo agudo de intersección; en P_2: $\text{tg } \theta = \dfrac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5}$ y $\theta = 46° 5'$ es el ángulo agudo de intersección.

Problema 5-27 Calcule la derivada de $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Solución. Es la derivada de un radical. Por tanto, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}$ multiplicado por la derivada de $x + \sqrt{1 + x^2}$ por ser una función compuesta. La derivada de $x + \sqrt{1 + x^2}$ es la derivada de una suma y, por tanto, es igual a 1 más la derivada de $\sqrt{1 + x^2}$ que es $\dfrac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x$. Finalmente, tenemos que $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x\right)$, y simplificando

$$y' = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{2\sqrt{1 + x^2}\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

Problema 5-28 Calcule la derivada de $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

Solución. Es la derivada de un radical, por tanto, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}}$ multiplicado por la derivada de $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ por ser una función compuesta.

La derivada de $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ es la derivada de un cociente, que es igual a la derivada de $1-\sqrt{x}$, que es $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ multiplicada por $1+\sqrt{x}$ menos la derivada de $1+\sqrt{x}$, que es $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ multiplicada por $1-\sqrt{x}$, y todo dividido por $(1+\sqrt{x})^2$, es decir,

$$\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$$

Finalmente, tenemos que

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= -\frac{1}{2(1+\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}.$$

Problema 5-29 Calcule la derivada de $y = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$.

Solución. Es la derivada de un producto, que es igual a la derivada de $\operatorname{sen}^m x$ multiplicada por $\cos^n x$, más la derivada de $\cos^n x$ multiplicada por $\operatorname{sen}^m x$. Pero la derivada de $\operatorname{sen}^m x$ es la derivada de una potencia y es igual a $m \operatorname{sen}^{m-1} x$ multiplicada por la derivada de sen x (porque es una función compuesta), que es cos x. La derivada de $\cos^n x$ es la derivada de una potencia, que es $n \cos^{n-1} x$, por la derivada de cos x (por ser función compuesta), que es $-\operatorname{sen} x$. Entonces $y' = m \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos x \cdot \cos^n x + n \cos^{n-1} x (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen}^m x = m \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x - n \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x = \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n-1} x (m \cos^2 x - n \operatorname{sen}^2 x)$.

Problema 5-30 Dada la función $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}}\right)$. Muestre que su prolongación continua es continua en el campo real y que no admite derivada en los puntos $x = 0, \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}, \pm \dfrac{1}{3}, \ldots$

Solución. $f(x)$ carece de sentido si $x = 0$ $\left(\text{por el factor sen } \dfrac{\pi}{x}\right)$, o si $x = 1/n$, $n \in \mathbf{Z}$ por el factor sen $\left(1/\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}\right) = \operatorname{sen}(1/\operatorname{sen} n\pi)$. Sin embargo, en todos los casos, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to \frac{1}{n}} f(x) = 0$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

La prolongación continua es $f^*(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}}\right), & \forall x \neq \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}, \pm \dfrac{1}{3}, \ldots, \pm \dfrac{1}{4}, \ldots, 0 \\ 0 & x = \pm 1, \pm \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{3} + \ldots \pm \dfrac{1}{n}, \ldots, 0 \end{cases}$

La derivada para $x = 0$ es $y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen} \frac{\pi}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{h}}}{h}$ indeterminado, para $x = 1/n$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{n} + h \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\frac{1}{n} + h} \right) \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\frac{1}{n} + h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{n} + h \right) \operatorname{sen} \left(n\pi - \frac{n^2 \pi h}{1 + nh} \right) \operatorname{sen} \frac{1}{\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{\frac{1}{n} + h} \right)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{n} + h \right) (-1)^n \frac{n^2 \pi h}{1 + nh} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{1/n + h}}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + h \right) \frac{n^2 \pi}{1 + nh} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{1/n + h}} = (-1)^n \frac{1}{n} \cdot n^2 \pi \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \pi n} =$$

$$= (-1)^n n\pi \cdot \operatorname{sen} \infty : \text{indeterminado.}$$

Es decir, la función no es derivable en ninguno de los puntos indicados.

Problema 5-31 Estudie la función $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ y calcule su derivada en $x = 2$.

Solución. Si $x \neq n \in \mathbf{Z}$, $f(x)$ es continua. Si $x = n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n + \sqrt{n - n} = n$. Si $x = -n$, $f(-n) = -n + \sqrt{-n + n} = -n$; $\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} (n + \sqrt{n - n}) = n$; $\lim_{x \to n^-} f(n - 1) = \lim_{x \to n^-} (n - 1 + \sqrt{n - (n - 1)}) = n$; $\lim_{x \to (-n)} f(-n) = \lim_{x \to (-n)^-} -(n + 1) + \sqrt{-n + (n + 1)} = -n$; $\lim_{x \to (-n)^+} f(n) = \lim_{x \to (-n)^+} (-n + \sqrt{-n + n} = -n)$.

La función es continua para todo valor de x.

$$f(2) = \lim_{h \to 0} \frac{[2 + h] + \sqrt{h + 2 - [2 + h]} - 2}{h} \quad \text{que depende de si } h > 0 \text{ o } h < 0$$

Derivada a la derecha: $f'_+(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + \sqrt{2 - 2 + h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \infty$.

Derivada a la izquierda: $f'_-(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + \sqrt{2 + h - 1} - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-1 + \sqrt{1 - h}}{-h} =$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-1 + \left(1 - \frac{1}{2} h + \ldots \right)}{-h} = \frac{1}{2}.$$

Problema 5-32 Halle la derivada n-ésima de la función $y = \frac{a - x}{a + x}$ en general y particularizarla para $x = 0$.

Solución. $y' = \frac{-(a + x) - (a - x)}{(a + x)^2} = -\frac{2a}{(a + x)^2} = -2a(a + x)^{-2}$; $y'' = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2!a \cdot (a + x)^{-3}$;

$y''' = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3!a \cdot (a + x)^{-4}$, e inductivamente se llega a $y^{(n)} = (-1)^n \cdot 2a \cdot n! \cdot (x + a)^{-(n+1)}$

$$y^{(n)}(0) = (-1)^n 2a \cdot n! \frac{1}{a^{n+1}} = \frac{(-1)^n 2 \cdot n!}{a^n}$$

Problema 5-33 Halle la derivada n-ésima de la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + ax)^3}}$.

Solución. $y = (x^2 + ax)^{-3/2}$; $y' = -\dfrac{3}{2}(x^2 + ax)^{-5/2}(2x + a)$

$$y'' = (-1)^2 \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}(x^2 + ax)^{-7/2}(2x + a)^2 - \frac{3}{2} \cdot 2(x^2 + ax)^{-5/2}$$

$$y''' = (-1)^3 \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3}(ax + x^2)^{-9/2}(a + 2x)^3 + \frac{3 \cdot 5}{2^2}(x^2 + ax)^{-7/4}4(a + 2x) + \frac{3 \cdot 5}{2}(ax + x^2)^{-7/2}(a + 2x) =$$

$$= (-1)^3 \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3}(ax + x^2)^{-9/2}(a + 2x)^3 + \frac{3^2 \cdot 5}{2}(ax + x^2)^{-7/2}(a + 2x).$$

Por inducción completa se llega al resultado

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n + 1)!}{2^n}(a + 2x)^n(ax + x)^{2^{-\frac{2n+3}{2}}} + \frac{n^2(n + 2)}{2}(ax + x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}(a + 2x).$$

Problema 5-34 Si $y = \operatorname{sen}^2 x$, halle la expresión general de la razón $y/y^{(n)}$. Existe un cierto valor de x comprendido entre 0 y $\pi/2$ e infinitos valores de n, para el cual la razón anterior vale $1/2^n$. Calcule dicho valor de x para $n = 13$.

Solución. $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$; $y'' = 2 \cos 2x = 2 \operatorname{sen}(2x + \pi/2)$; $y''' = 2^2 \cos(2x + \pi/2) = 2^2 \operatorname{sen}\left(2x + 2\dfrac{\pi}{2}\right), \ldots, y^{(n)} = 2^{n-1} \cos\left[2x + (n - 2)\dfrac{\pi}{2}\right] = 2^{n-1} \operatorname{sen}\left[2x + (n - 1)\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{y}{y^{(n)}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^{n-1} \operatorname{sen}[2x + (n - 1)\pi/2]}; \text{ para } n = 13, \text{ resulta } \frac{y}{y^{(n)}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^{n-1} \operatorname{sen}(2x + 6\pi)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2^n \operatorname{sen} x \cos x}$$

para $x = \pi/4$,

$$\frac{y}{y^{(n)}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2^n}$$

Problema 5-35 Calcule la derivada enésima de la función $y = \dfrac{1}{(x - 1)^2(x - 2)}$.

Solución. Descomponiendo en fracciones simples: $\dfrac{1}{(x - 1)^2(x - 2)} = \dfrac{A}{(x - 1)^2} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x - 2}$.

Identificando: $1 = A(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)^2$, para $x = 1$, $A = -1$; para $x = 2$, $C = 1$, $B + C = 0$; $B = -C = -1$, sustituyendo $y = \dfrac{-1}{(x - 1)^2} - \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2}$. Derivando n veces cada sumando por separado se obtiene

$$\left(\frac{1}{x - 2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}}; \quad \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x - 1)^{n+1}}; \quad \left(\frac{1}{(x - 1)^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n + 1)!}{(x - 1)^{n+2}}$$

Sumándolas resulta

$$y = (-1)^{n+1}(n + 1)! \frac{1}{(x - 1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x - 1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}}$$

Problema 5-36. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, muestre que:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

b) $$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3.$$

Solución. *a)* $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{du}\right)\frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

b) $$\frac{d^3y}{du^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{du^2}\;\frac{du}{dx}\;\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dy}{du}\;\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^2y}{du^2}\;\frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3y}{du^3} \cdot \frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{d^2y}{du^2}\;\frac{du}{dx}\;\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dy}{du}\;\frac{d^3u}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3.$$

Problema 5-37 Si f es derivable en x_0, entonces $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + hf^*(h)$, con $f^*(h)$ una función tal que $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$. Si $f(x) = x^2$, aplique el teorema a esta función si $x_0 = 3$

Solución. Por definición, $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} f'(x_0)\right] = 0$. Sea $hf^*(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + hf^*(h)$ y $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$. Esto también se puede escribir como $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + f^*(h)$ con $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$. Lo cual dice que la fracción se puede aproximar por $f'(x_0)$ cometiendo un error $f^*(h)$, que tiende a cero si h tiende a cero.

Para la función tenemos que $f(3 + h) = (3 + h)^2 = f(3) + hf'(3) = hf^*(h) = 3^2 + 6h + hf^*(h)$ con $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$. Como $(3 + h)^2 = 3^2 + 6h + h^2$, se obtiene que $hf^*(h) = h^2 \Rightarrow f^*(h) = h$. Por tanto, $\lim_{h \to 0} h = 0$, es decir, $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$.

Problema 5-38 Deduzca todas las fórmulas de derivación empleando el teorema anterior como definición de derivada.

Solución. 1. *Suma.* f y g son derivables en x_0, entonces, por el problema anterior, $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + hf^*(h)$ con $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$ y $g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + hg^*(h)$ con $\lim_{h \to 0} g^*(h) = 0$.

Sea $s(x) = f(x) + g(x)$. Entonces $\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} = f'(x_0) + g'(x_0) + f^*(h) + g^*(h)$. Entonces $\lim_{h \to 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$ porque $\lim_{h \to 0} f^*(h) = 0$ y $\lim_{h \to 0} g^*(h) = 0$.

$$\therefore (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. *Producto.* Sea $p(x) = f(x)g(x)$. Como f y g son derivables en x_0, se tienen las dos ecuaciones del caso 1; entonces, $f(x_0 + h)g(x_0 + h) = f(x_0)g(x_0) + h[f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^*(h) + f^*(h)g(x_0)] + h^2[f'(x_0)g'(x_0) + f^*(h)g^*(h) + f'(x_0)g^*(h) + f^*(h)g'(x_0)]$.

Por tanto,

$$\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^*(h) + f^*(h)g(x_0) + h[f'(x_0)g'(x_0) + f^*(h)g^*(h) + f'(x_0)g^*(h) + f^*(h)g'(x_0)]$$

Calculando el límite de esta expresión cuando $h \to 0$, se obtiene

$$p'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\ ; \text{ puesto que } \lim_{h\to 0} g^*(h) = 0 \text{ y } \lim_{h\to 0} f^*(h) = 0$$

3 *Función compuesta.* Sea $\phi(x) = g[f(x)]$

$$\phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g[f(x_0 + h)] - g[f(x_0)]}{h}$$

Por el Problema 5-37, $f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{hf'(x_0) + hf^*(h)}{k}$.

Entonces $\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = \frac{g[f(x_0) + k] - g[f(x_0)]}{h}$.

De nuevo por el Problema 5-37, $g[f(x_0) + k] = g[f(x_0)] + kg'[f(x_0)] + kg^*(k)$.

Así, $\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = [g'(f(x_0)) + g^*(k)]\frac{k}{h} = [g'(f(x_0)) + g^*(k)][f'(x_0) + f(h)]$.

Entonces $\phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = g'[f(x_0)] \cdot f'(a)$.

$$\therefore\ \phi'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0).$$

Las derivadas restantes se dejan como ejercicio.

Problema 5-39 *a)* Pruebe, partiendo de la definición, que si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, para $a \neq 0$.

b) Pruebe que la recta tangente al grafo de f en $(a, 1/a)$ no corta al grafo de f, excepto en $(a, 1/a)$.

Solución. *a)* $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a + h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a + h)} = -\frac{1}{a^2}$.

b) La recta tangente en el punto $(a, 1/a)$ es el grafo de

$$g(x) = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

o

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \iff x = a$$

La Figura 5-7 ilustra las rectas tangentes al grafo de $f(x) = 1/x$.

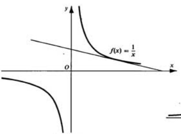


Figura 5-7

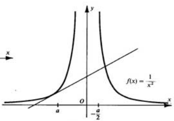


Figura 5-8

Problema 5-40 *a)* Pruebe que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.

b) Pruebe que la recta tangente a f en $(a, 1/a^2)$ corta a f en otro punto, que está situado al otro lado del eje vertical.

Solución.

a) $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2ah - h^2)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}$$

b) La recta tangente en el punto $(a, 1/a^2)$ es el grafo de

$$g(x) = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

o

$$2x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0$$

o

$$0 = (x-a)(2x^2 - ax - a^2) = (x-a)(2x+a)(x-a)$$

Así, $x = a$ o $x = -a/^2$; el punto $(-a/2, 4/a^2)$ está situado sobre el lado opuesto del eje vertical con relación a $(a, 1/a^2)$.

La Figura 5-8 ilustra las rectas tangentes al grafo de $f(x) = 1/x^2$.

Problema 5-41 Pruebe que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = \sqrt{a}/2a$ para $a > 0$.

Solución.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

Problema 5-42 Para cada número natural n, sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$, y $S_3'(x) = 3x^2$, deduzca una fórmula para $S_n'(x)$. Pruebe la suposición. (La expresión $(x+h)^n$ se puede desarrollar por el teorema del binomio.)

Solución. Suponemos $S_n'(x) = nx^{n-1}$. Prueba:

$$S_n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^j - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^{j-1} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}, \text{ porque } \lim_{h\to 0} h^{j-1} = 0 \text{ para } j > 1$$

Problema 5-43 • Encuentre f' si $f(x) = [x]$.

Solución. $f'(x) = 0$ para x no entero, y $f'(x)$ no está definida si x es un entero.
En efecto, si x no es entero

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x+h] - [x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x] - [x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Si x es entero

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x+h] - [x]}{h}$$

Pero $\lim_{h\to 0} [x+h] - \lim_{h\to 0} [x]$ no está definido cuando x es entero (vea Problema 3-116), y así $f'(x)$ no está definida.

Problema 5-44 Pruebe, partiendo de la definición, y dibujando un grafo para ilustrar:
a) Si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$. *b)* Si $g(x) = c \cdot f(x)$, entonces $g'(x) = c \cdot f'(x)$.

Solución. *a)* $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + c] - [f(x) + c]}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

La Figura 5-9 indica la relación entre f' y $(f + c)'$.

b) $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$

La Figura 5-10 indica la relación entre f' y $(cf)'$.

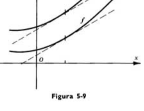


Figura 5-9

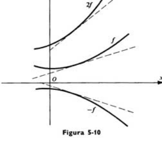


Figura 5-10

Problema 5-45 Suponga que $f(x) = x^3$.

a) Calcule $f'(9)$; $f'(25)$, $f'(36)$.
b) Calcule $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$.
c) Calcule $f'(a^2)$, $f'(x^2)$. Si no resuelve este problema es porque no tiene en cuenta algo muy importante: $f'(x^2)$ es la derivada de f en el número x^2; no es la derivada en x de la función $g(x) = f(x^2)$.
Para mayor claridad resuelva *d*).
d) Para $f(x) = x^3$ compare $f'(x^2)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f(x^2)$.

Solución. $f'(x) = 3x^2$

a) $f'(g) = 3 \cdot 9^2$; $f'(25) = 3 \cdot (25)^2$; $f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.
b) $f'(3^2) = f'(9) = 3 \cdot 9^2$; $f'(5^2) = f'(25) = 3 \cdot (25)^2$; $f'(6^2) = f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.
c) $f'(a^2) = 3(a^2)^2 = 3a^4$; $f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4$.
d) $f'(x^2) = 3x^4$; pero $g(x) = f(x^2) = (x^2)^3 = x^6$ y $g'(x) = 6x^5$.

Problema 5-46 *a)* Suponga $g(x) = f(x + c)$. Pruebe (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x + c)$. Dibuje un grafo para ilustrar esto. Para hacer este problema deberá escribir aparte las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x + c)$ correctamente. El propósito del Problema 5-45 fue convencerle de que aunque este problema es fácil, no es completamente trivial, y hay algo para probar: no se pueden simplemente escribir primas dentro de la ecuación $g(x) = f(x + c)$. Para mayor énfasis:

b) Pruebe que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = c \cdot f(cx)$.

c) Suponga que f es derivable y periódica, con periodo a (esto es, $f(x + a) = f(x)\ \forall x$). Pruebe que f es también periódica.

Solución. *a)* $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h + c) - f(x + c)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f([x + c] + h) - f(x + c)}{h} = f'(x + c).$$

La Figura 5-11 indica la relación entre f' y g' si $g(x) = f(x + c)$.

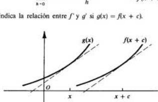


Figura 5-11

b) $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(cx + ch) - f(cx)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c[f(cx + ch) - f(cx)]}{ch} =$$
$$= \lim_{k \to 0} \frac{c[f(cx + k) - f(cx)]}{k} = c \cdot \lim_{k \to 0} \frac{f(cx + k) - f(cx)}{k} = c \cdot f'(cx).$$

c) Si $g(x) = f(x + a)$, entonces $g'(x) = f'(x + a)$, por *a*). Pero $g = f$, y así $f'(x) = g'(x) = f'(x + a)$ para todo x, lo cual significa que f' es periódica, con periodo a.

Problema 5-47 Encuentre $f'(x)$ y también $f'(x+3)$ en los siguientes casos. Sea muy metódico o se equivocará seguramente.

a) $f(x) = (x+5)^5$.
b) $f(x+3) = x^5$.
c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

Solución. *a*) Si $g(x) = x^5$, entonces $g'(x) = 5x^4$. Ahora $f(x) = g(x+5)$ y así, por el Problema 5-46 *a*), $f'(x) = g'(x+5) = 5(x+5)^4$.

b) $f(x) = (x-3)^5$ porque si $x_1 = x+3$, $x = x_1 - 3$ y $f(x_1) = (x_1 - 3)^5$ y quitando el subíndice $f(x) = (x-3)^5$, $f'(x) = 5(x-3)^4$, como en la parte *a*); o $f'(x+3) = 5x^4$.

c) Si $x_1 = x+3$, $x = x_1 - 3$ y $f(x_1) = (x_1 - 3 + 5)^7$ o $f(x_1) = (x_1 + 2)^7$ y quitando el subíndice $f(x) = (x+2)^7$, $f'(x) = 7(x+2)^6$, como en la parte *a*); $f'(x+3) = 7(x+5)^6$.

Problema 5-48 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = g(t+x)$, y si $f(t) = g(t+x)$. La respuesta no será la misma.

Solución. Si $f(x) = g(t+x)$, entonces $f'(x) = g'(t+x)$, por el Problema 5-46 *a*).
Si $f(t) = g(t+x)$, entonces $f'(t) = g'(t+x)$, por el Problema 5-46 *a*), así que $f'(x) = g'(2x)$ (haciendo $t = x$).

Problema 5-49 • Sea f una función tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$. Pruebe que f es derivable en 0. [No se asuste de esta función. Escriba aparte la definición de $f'(0)$.]

Solución.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Ahora

$$\frac{f(h)}{h} = \begin{cases} 0, \text{ si } h \text{ es irracional} \\ \dfrac{h^2}{h} = h, \text{ si } h \text{ es racional} \end{cases}$$

así que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$.

Problema 5-50 • *a*) Sea f una función tal que $|f(x)| \le x^2$ para todo x. Pruebe que f es derivable en 0.

b) Este resultado ¿puede generalizarse si x^2 se remplaza por $|g(x)|$? ¿Qué propiedad debe tener g?

Solución. *a*) Observe que $f(0) = 0$. Debido a que $|f(h)/h| \le h^2/|h| \le |h|$, se sigue que $\lim_{h \to 0} f(h)/h = 0$, esto es, $f'(0) = 0$.

b) Si $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$, entonces $f(0) = 0$. Para $|f(h)/h| \le |g(h)/h| = |[g(h) - g(0)]/h|$, lo cual puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo h suficientemente pequeño, porque $g'(0) = 0$.

Problema 5-51 • Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \le |x|^\alpha$, pruebe que f es derivable en 0.

Solución. Debido a que $|f(0)| \le |0|^\alpha$, tenemos $f(0) = 0$. Ahora $|f(h)/h| \le |h|^{\alpha - 1}$, y $\lim_{h \to 0} |h|^{\alpha - 1} = 0$, porque $\alpha > 1$, y así $\lim_{h \to 0} f(h)/h = 0$. Por tanto, $f'(0) = 0$.

Problema 5-52 • Sea $0 < \beta < 1$. Pruebe que si f satisface $|f(x) \geq |x|^\beta$ y $f(0) = 0$, entonces f no es derivable en 0.

Solución. $|f(h)/h| \geq |h|^{\beta-1}$, debido a que $\beta - 1 < 0$, el número $|h|^{\beta-1}$ se hace muy grande cuando h se aproxima a 0, y así $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$ no existe.

Problema 5-53 •• Sea $f(x) = 0$ para x irracional, y $1/q$ para $x = p/q$ reducida a su mínima expresión. Pruebe que f no es derivable en a para cualquier a.

Nota. Obviamente es suficiente probar esto para a irracional ¿Por qué? Si $a = na_1a_2a_3\ldots$ es el desarrollo decimal de a, considere $[f(a + h) - f(a)]/h$ para h racional, y también para $h = 0{,}00\ldots 0a_{n+1}a_{n+2}\cdots$

Solución. Debido a que f no es continua en a si a es racional, f no será derivable en a racional. Si $a = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ es irracional y h es racional, entonces $a + h$ es irracional, así $f(a + h) - f(a) = 0$. Pero si $h = -0{,}00\ldots\ 0\,a_{n+1}a_{n+2}\ldots$, entonces $a + h = 0{,}a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, y así $f(a + h) \geq 10^{-n}$, mientras $|h| < 10^{-n}$, así que $|[f(a + h) - f(a)]/h| \geq 1$. Por tanto, $[f(a + h) - f(a)]/h$ es cero para h arbitrariamente pequeño y tiene también un valor absoluto ≥ 1 para h arbitrariamente pequeño, luego $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ no puede existir.

Problema 5-54 *a)* Suponga que $f(a) = g(a) = h(a)$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x y que $f'(a) = h'(a)$. Pruebe que g es derivable en a y que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. [Comience con la definición de $g'(a)$.]

b) Muestre que la conclusión no es cierta si omitimos la hipótesis $f(a) = g(a) = h(a)$.

Solución. *a)* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Sea $x = a + t$,

$$f(a + t) \leq g(a + t) \leq h(a + t)$$

Restando la misma cantidad $f(a) = g(a) = h(a)$ y dividiendo por $t \neq 0$,

$$\frac{f(a + t) - f(a)}{t} \leq \frac{g(a + t) - g(a)}{t} \leq \frac{h(a + t) - h(a)}{t}$$

Los miembros extremos se aproximan al mismo límite y, por tanto (teorema del sandwich), el miembro intermedio se aproxima al mismo límite.

b) Un contraejemplo sin la condición $f(a) = g(a) = h(a)$ se muestra en la Figura 5-12.

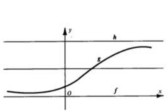


Figura 5-12

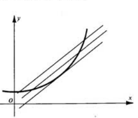


Figura 5-13

Problema 5-55 • Sea f cualquier función polinomial. La línea tangente a f en $[a, f(a)]$ es el grafo de $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. Por tanto, $f(x) - g(x)$ es la función polinomial $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

a) Encuentre $d(x)$ cuando $f(x) = x^4$ y demuestre que es divisible por $(x - a)^2$.

b) Debido a que $d(x) = (x - a)^2$ cuando $f(x) = x^2$ y cuando $f(x) = x^3 d(x) = (x - a)^2(x + 2a)$, hay alguna evidencia de que $d(x)$ es siempre divisible por $(x - a)^2$. La Figura 5-13 da una justificación intuitiva.

Generalmente, las rectas paralelas a la tangente cortan el grafo en dos puntos; la recta tangente corta el grafo solo una vez cerca del punto, entonces la intersección debería ser una «doble intersección». Para dar prueba rigurosa, primero observe que

$$\frac{d(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

Ahora conteste las siguientes preguntas: ¿Por qué es $f(x) - f(a)$ divisible por $(x - a)$? ¿Por qué hay una función polinomial h tal que $h(x) = d(x)/(x - a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué $\lim_{x \to a} h(x) = 0$? ¿Por qué $h(a) = 0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?

Solución. *a)* $d(x) = f(x) - f(a)(x - a) - f(a) = x^4 - 4a^3(x - a) - a^4 = x^4 - 4a^3x + 3a^4 =$
$= (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x - 3a^3) = (x - a)(x - a)(x^2 + 2ax + 3a^2)$.

b) $f(x) - f(a)$ obviamente tiene una raíz a, y, por tanto, $f(x) - f(a)$ es divisible por $(x - a)$. Esto significa que $[f(x) - f(a)]/(x - a)$ es una función polinomial. y así $d(x)/(x - a)$ es la función polinomial $h(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a) - f'(a)$. Entonces $\lim_{x \to a} h(x) = 0$, por la definición de $f'(a)$. Esto implica que $h(a) = 0$, porque la función h es continua. Así, $d(x)/(x - a)$ tiene a como una raíz, y, por tanto, $d(x)/(x - a)$ es divisible por $(x - a)$, esto es, $d(x)$ es divisible por $(x - a)^2$.

Problema 5-56 • *a)* Suponga que f es derivable en x. Pruebe que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

Nota. Recuerde un viejo truco algebraico: un número no cambia si se le añade y se le quita la misma cantidad.

** *b)* Pruebe, más generalmente, que

$$f'(x) = \lim_{h,k \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x - k)}{h + k}$$

Solución.

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$.

Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}\right] = f'(x)$$

b) $\frac{f(x + h) - f(x - k)}{h + k} = \frac{h}{h + k} \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{k}{h + k} \cdot \frac{f(x) - f(x - k)}{k}$.

Debido a que $[f(x+h)-f(x)]/h$ y $[f(x)-f(x-k)]/k$ están próximas a $f'(x)$ cuando h y k son suficientemente pequeños, esto podría tomarse para deducir que $\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}$ está próximo a $\left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right)f'(x)=f'(x)$. Sin embargo, hay que tener cuidado con este razonamiento por la siguiente razón: si $h/(h+k)$ fuera muy grande, entonces

$$\frac{h}{h+h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

podría diferir de $hf'(x)/(h+k)$ en valor muy grande, aun si $[f(x+h)-f(x)]/h$ difiere de $f'(x)$ en valor muy pequeño. Sería esencial tomar h y k positivos; de otra manera, $h/(h+k)$ podría hacerse muy grande eligiendo k próximo a $-h$. En efecto, el teorema es falso si h y k tienen diferentes signos, aun cuando $h+k=0$ no se permite. El razonamiento correcto es como sigue: si $\varepsilon>0$, hay un $\delta>0$ tal que para $0<h<\delta$ y $0<k<\delta$ tenemos

$$-\varepsilon<\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x-k)}{k}-f'(x)<\varepsilon$$

Como $k, h>0$, podemos multiplicar estas desigualdades por $h/(h+k)$ y $k/(h+k)$, respectivamente. Sumando los resultados,

$$-\varepsilon\left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right)<\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}-\left(\frac{h}{h+k}+\frac{k}{h+k}\right)f'(x)<\varepsilon\left(\frac{h}{h+k}+\frac{h}{h+k}\right)$$

o

$$-\varepsilon<\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}-f'(x)<\varepsilon$$

Esto prueba el límite requerido.

Problema 5-57 Si $S_n(x)=x^n$, y $0\le k\le n$, pruebe que

$$S_n^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=k!\binom{n}{k}x^{n-k}$$

Solución. Prueba por recurrencia sobre k. El resultado es verdadero para $k=0$. Si

$$S_n^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

entonces

$$S_n^{(k+1)}(x)=\frac{n!(n-k)}{(n-k)!}x^{n-k-1}=\frac{n!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!}x^{n-k-1}$$

$$S_n^{(k+1)}(x)=\frac{n!}{[n-(k+1)]!}x^{n-(k+1)}$$

Problema 5-58 *a*) Encuentre $f'(x)$ si $f(x)=|x|^3$. Encuentre $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?

b) Analice f análogamente si $f(x)=x^4$ para $x\ge0$ y $f(x)=-x^4$ si $x\le0$.

Solución. *a*) Debido a que

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x>0\\ -x^3, & x<0,\end{cases}$$

tenemos

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ -3x^2, & x<0\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}6x, & x>0\\ -6x, & x<0\end{cases}$$

Además, $f'(0)=f''(0)=0$. Pero $f'''(0)$ no existe.

b) La misma clase de razonamiento muestra que

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x > 0 \\ -4x^3, & x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x > 0 \\ -12x^2, & x < 0 \end{cases} \qquad f'''(x) \begin{cases} 24x, & x > 0 \\ -24x, & x < 0 \end{cases}$$

y que $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, pero que $f^{(4)}(0)$ no existe.

Problema 5-59 • Sea $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$ y sea $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Pruebe que $f^{(n-1)}$ existe (y encuentre una fórmula para ella), pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

Solución. Obviamente $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ para $0 \leq k \leq n-1$ y $x > 0$, mientras $f^{(k)}(x) = 0$ para todo k si $x < 0$. De estas fórmulas es fácil ver que $f^{(k)}(0) = 0$ para $0 \leq k \leq n-1$. En particular, $f^{(n-1)}(x) = n!x$ para $x \geq 0$ y $f^{(n-1)}(x) = 0$ para $x \leq 0$. Así, $f^{(n)}(0)$ no existe, porque $\lim\limits_{h \to 0^+} n!h/h = n!$, mientras $\lim\limits_{h \to 0} 0/h = 0$.

Problema 5-60 Encuentre $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))]$.

b) $f(x) = \operatorname{sen}[(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7]$.

c) $f(x) = [((x^2 + x)^3 + x)^4 + x]^5$.

d) $f(x) = \operatorname{sen}[x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}^2 x)]$.

e) $f(x) = \operatorname{sen}[6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x))]$.

f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.

h) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$

i) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$

Solución.

a) $\cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))] \cdot \cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))] \cdot \cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)] \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$.

b) $\cos(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7 \cdot 7(\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^6 \cdot (7\operatorname{sen}^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6)$.

c) $5[(x^2 + x)^3 + x]^4 \cdot [1 + 4((x^2 + x)^3 + x)^3\{1 + 3(x^2 + x)^2[1 + 2x]\}]$.

d) $\cos[x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2)] \cdot [(2x + \cos(x^2 + \operatorname{sen} x^2) \cdot (2x + 2x\cos x^2))]$.

e) $\cos[6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x))] \cdot 6[-\operatorname{sen}(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)] \cdot 6\cos(6\cos x) \cdot 6(-\operatorname{sen} 6x) \cdot 6]$.

f) $\dfrac{(1 + \operatorname{sen} x)(2x\cos x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x^2 \cdot 2\operatorname{sen} x\cos x) - \cos x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$.

g) $\dfrac{-\left[1 - \dfrac{-2(1 + \cos x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}\right]^2}$.

h) $\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right) \cdot \dfrac{3x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) - x^3\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right) \cdot \left(\dfrac{3x^2\operatorname{sen} x - x^3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}$.

i) $\cos\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right) \cdot$

$$\cdot \frac{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right) - x\left[1 - \cos\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)\dfrac{x - \operatorname{sen} x - x[1 - \cos x]}{(x - \operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)\right]^2}$$

Problema 5-61 Para cada una de las siguientes funciones f encuentre $f'[f(x)]$ [no $(f \circ f)'(x)$]. *a)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. *b)* $f(x) = \text{sen } x$. *c)* $f(x) = x^2$. *d)* $f(x) = 17$.

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'[f(x)] = \dfrac{-1}{\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)^2} = -\dfrac{(1+x)^2}{(2+x)^2}$.

b) $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'[f(x)] = \cos(\text{sen } x)$.

c) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'[f(x)] = 2 \cdot x^2 = 2x^2$.

d) $f'(x) = 0 \Rightarrow f'[f(x)] = 0$.

Problema 5-62 Para cada una de las siguientes funciones f encuentre $f[f'(x)]$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *b)* $f(x) = x^2$. *c)* $f(x) = 17$. *d)* $f(x) = 17x$.

Solución.

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f[f'(x)] = -\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}} = -x^2$.

b) $f'(x) = 2x$; $f(x) = x^2 \Rightarrow f[f'(x)] = (2x)^2 = 4x^2$.

c) $f'(x) = 0$; $f(x) = 17 \Rightarrow f[f'(x)] = 17$.

d) $f'(x) = 17$; $f(x) = 17x \Rightarrow f[f'(x)] = f(17) = 17 \cdot 17$.

Problema 5-63 Encuentre f' en términos de g' si

a) $f(x) = g[x + g(a)]$.
b) $f(x) = g[x \cdot g(a)]$.
c) $f(x) = g[x + g(x)]$.
d) $f(x) = g(x) \cdot (x - a)$.
e) $f(x) = g(a)(x - a)$.
f) $f(x + 3) = g(x^2)$.

Solución.

a) $f'(x) = g'[x + g(a) \cdot D_x[x + g(a)] = g'[x + g(a)] \cdot 1 = g'[x + g(a)]$.

b) $f'(x) = g'[x \cdot g(a)] \cdot D_x[x \cdot g(a)] = g'[x \cdot g(a)] \cdot [x \cdot 0 + g(a) \cdot 1] = g'[x \cdot g(a)] \cdot g(a)$.

c) $f'(x) = g'[x + g(x) \cdot D_x[x + g(x)] = g'[x + g(x)] \cdot [1 + g'(x)]$.

d) $f'(x) = g(x) \cdot D_x(x - a) + (x - a) \cdot D_x g(x) = g(x) \cdot (1 - 0) + (x - a) \cdot g'(x) = g(x) + g'(x) \cdot (x - a)$.

e) $f'(x) = g(a) \cdot D_x(x - a) + (x - a) \cdot D_x g(a) = g(a)(1 - 0) + (x - a) \cdot 0 = g(a)$.

f) $f'(x) = g'[(x - 3)^2] \cdot 2(x - 3)$.

Problema 5-64 Sea $f'(x) = x^2 \text{ sen } 1/x$ para $x \neq 0$, y sea $f(0) = 0$. Suponga también que h y k son dos funciones tales que

$$h'(x) = \text{sen}^2 [\text{sen}(x + 1)] \qquad k'(x) = f(x + 1)$$
$$h(0) = 3 \qquad k(0) = 0.$$

Encuentre:

a) $(f \circ h)'(0)$. *b)* $(k \circ f)'(0)$. *c)* $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$.

Solución.

a) $(f \circ h)'(0) = f'[h(0)] \cdot h'(0) = f'(3) \cdot \text{sen}^2(\text{sen } 1) = 9(\text{sen } 1/3) \cdot \text{sen}^2(\text{sen } 1)$, ya que $f'(x) = x^2 \text{ sen } 1/x \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(3) = 9 \text{ sen } 1/3$.

b) $(k \circ f)'(0) = k'[f(0)] \cdot f'(0) = k'(0) \cdot f'(0) = f(1) \cdot 0 = 0$.

c) $\alpha'(x^2) = k'(x^4) \cdot 2x^2 = \text{sen}^2 [\text{sen}(x^4 + 1)] \cdot 2x^2$, ya que $\alpha'(x) = h'(x^2) \cdot 2x \Rightarrow \alpha'(x^2) = \ldots$

Problema 5-65 * Encuentre $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(0) = g'(0) = 0$.

Solución. Por definición, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)\operatorname{sen} 1/x}{x}$. Ahora

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - 0}{x} = g'(0) = 0$$

Debido a que $|\operatorname{sen} 1/x| \leq 1$, se sigue que $f'(0) = 0$. (Vea Problema 3-63.)

Problema 5-66 Usando la derivada de $f(x) = 1/x$ encontrada en el Problema 5-1 *d*), encuentre $(1/g)'(x)$ por la regla de la cadena (derivación de funciones compuestas).

Solución. La regla en cadena $\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = (f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)$$

ya que $f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{1}{g(x)}$ porque $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Problema 5-67 *a*) Encuentre $f'(x)$ para $-1 < x < 1$ si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

b) Pruebe que la recta tangente al grafo de f en $(a, \sqrt{1 - a^2})$ corta al grafo solo en ese punto (y así muestra que la definición geométrica elemental de recta tangente coincide con la nuestra).

Solución. *a*) La regla en cadena y el Problema 5-1 *c*) $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) La recta tangente en el punto $(a, \sqrt{1 - a^2})$ es el grafo de

$$g(x) = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}(x - a) + \sqrt{1 - a^2}$$

Así, si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}(x - a) + \sqrt{1 - a^2}$$

Elevando al cuadrado

$$1 - x^2 = \frac{a^2(x - a)^2}{1 - a^2} - 2a(x - a) + 1 - a^2$$

Multiplicando ambos miembros por $1 - a^2$, y reduciendo términos semejantes, $-x^2 - a^2 = -2ax$, esto es,

$$(x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = a$$

Observe que el mismo razonamiento muestra que g no corta el grafo de $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, que es la mitad inferior del círculo unitario.

Problema 5-68 * *a)* Pruebe que si f es derivable en a, entonces $|f|$ es también derivable en a, siempre que $f(a) \neq 0$.

b) Dé un contraejemplo si $f(a) = 0$.

c) Pruebe que si f y g son derivables en a, entonces las funciones max (f, g) y min (f, g) son derivables en a, siempre que $f(a) \neq g(a)$.

d) Dé un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

Solución. *a)* Por ser f derivable en a, es continua en a. De que $f(a) \neq 0$, se sigue que $f(x) \neq 0$ para todo x en un intervalo alrededor de a. Así, $f = |f|$ o $f = -|f|$ en este intervalo, y $|f|'(a) = f'(a)$ o $|f|'(a) = -f'(a)$. También es posible usar la regla en cadena y el Problema 5-37: $|f| = \sqrt{f^2}$, y así

$$|f|'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)^2}} \cdot 2f(x) \cdot f'(x) = f'(x) \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

b) Sea $f(x) = x - a$.

c) Se deduce de la parte *a)*, porque max $(f, g) = [f + g + |f - g|]/2$ y min $(f, g) = [f + g - |f - g|]/2$.

d) Use el mismo ejemplo de la parte *b)*, eligiendo $g = 0$.

Problema 5-69 *** Pruebe que si $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existen, entonces $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe. Es inútil buscar una fórmula para $(f \circ g)^{(n)}(a)$, como comprobará si efectúa algunos ensayos. Para probar que $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe tendrá que idear una proposición sobre $(f \circ g)^{(n)}(a)$ que pueda probarse por inducción. Ensaye algo como: «$(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe y es una suma de términos, cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma...».

Solución. Las fórmulas

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'[g(x)] \cdot g'(x),\\
(f \circ g)''(x) &= f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x),\\
(f \circ g)'''(x) &= f'''[g(x)] \cdot [g'(x)]^3 + 2f''[g(x)] \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f''[g(x)] \cdot g'(x) + g''(x) + f'[g(x)] \cdot g'''(x),
\end{aligned}$$

llevan a la siguiente conjetura: Si $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existen, entonces $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe y es una suma de términos de la forma

$$c \cdot [g'(a)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k)}[g(a)]$$

para algún número c, enteros no negativos $m_1, \ldots, m_n$, y número natural $k \leq n$. Para probar esta proposición por inducción, observe que es verdad para $n = 1$ (con $a = m_1 = k = 1$). Ahora supongamos que para algún n esta proposición es verdad para todos los números a tales que $f^{(n)}[g(a)]$ y $g^{(n)}(a)$ existen. Supongamos que $f^{(n+1)}[g(a)]$ y $g^{(n+1)}(a)$ existen. Entonces $g^{(k)}(x)$ deberá existir para todo $k \leq n$ y todo x en algún intervalo alrededor de a, y $f^{(k)}(y)$ deberá existir para todo $k \leq n$ y todo y en algún intervalo alrededor de $g(a)$. Debido a que g es continua en a, esto implica que $f^{(k)}[g(x)]$ existe para todo x en algún intervalo alrededor de a. Así la proposición es verdadera para todos estos x, esto es, $(f \circ g)^{(n)}(x)$ es la suma de términos de la forma

$$c \cdot [g'(x)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(x)]^{m_n} \cdot f^{(k)}[g(a)],\ m_1, \ldots, m_n \geq 0,\ 1 \leq k \leq n$$

Por consiguiente, $(f \circ g)^{(n+1)}(a)$ es una suma de términos de la forma

$$c \cdot m_z[g'(a)]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [g^{(z)}(a)]^{m_z - 1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k)}[g(a)]\ m_z > 0$$

$$c \cdot [g'(a)]^{m_1 + 1} \cdot \ldots \cdot [g^{(n)}(a)]^{m_n} \cdot f^{(k+1)}[g(a)]$$

Problema 5-70 *a)* Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, encuentre una función g tal que $g' = f$.

b) Si $f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$, encuentre una función g con $g' = f$.

c) ¿Hay una función $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}$ tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$?

Solución. *a)* Podemos elegir $g(x) = \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + \ldots + \frac{a_1 x^2}{2} + a_0 x + c$, para cualquier número c.

b) Sea $g(x) = \frac{b_2 x^{-1}}{-1} + \frac{b_3 x^{-2}}{-2} + \ldots + \frac{b_m x^{-m+1}}{-m+1}$.

c) No, la derivada de f es

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x^3} - \ldots - \frac{mb_m}{x^{m+1}}$$

Problema 5-71 ** Muestre que hay una función polinomial f de grado n tal que:

a) $f'(x) = 0$ para exactamente $n - 1$ números x.
b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.
c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.
d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n - k$ es impar.

Solución. *a)* Sea g una función polinomial de grado $n - 1$ con exactamente $n - 1$ raíces, entonces $g = f'$ para alguna función polinomial f de grado n (Problema 5-70).

b) Procediendo como en *a)*, partiendo de una función polinomial g de grado $n - 1$ con ninguna raíz (observe que $n - 1$ es par).

c) Podemos proceder como en *a)*, o simplemente observar que $f(x) = x^n$ tiene la propiedad deseada.

d) Procediendo como en *a)*, partiendo de una función polinomial g de grado $n - 1$ con k raíces.

Problema 5-72 * *a)* El número a se llama «raíz doble» de la función polinomial f si $f(x) = (x - a)^2 \cdot g(x)$ para alguna función polinomial g. Pruebe que a es una raíz doble de f si, y solo si, a es una raíz de f y f'.

b) ¿Cuándo $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ tiene una raíz doble? ¿Qué dice la condición geométricamente?

Solución. *a)* Si a es una raíz doble de f, con lo que $f(x) = (x - a)^2 g(x)$, entonces $f'(x) = (x - a)^2 g'(x) + 2(x - a)g(x)$, luego $f'(a) = 0$. Inversamente, si $f(a) = 0$ y $f'(a) = 0$, entonces $f(x) = (x - a)g(x)$ para algún g, y $f'(x) = (x - a)g'(x) + g(x)$, luego $0 = f'(a) = g(a)$; por tanto, $g(x) = (x - a)h(x)$, y $f(x) = (x - a)^2 h(x)$.

b) La única raíz de $0 = f'(x) = 2ax + b$ es $x = -\frac{b}{2a}$, de manera que f tiene una raíz doble si, y solo si,

$$0 = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

o $b^2 - 4ac = 0$. Geométricamente, ésta es, precisamente, la condición de que el grafo de f toque el eje horizontal en el único punto $-b/2a$. (Compare con la Figura 5-12, Problema 5-55.)

Problema 5-73 Si f es derivable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Encuentre $d'(a)$.

Solución. Debido a que $d'(x) = f'(x) - f'(a)$, tenemos $d'(a) = 0$. Luego a es una raíz doble de d [vea el problema anterior, parte *a)*].

Problema 5-74 ** Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.

a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números diferentes, pruebe que hay una función polinomial f de grado $2n - 1$, tal que $f(x_j) = f'(x_j) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$. (Aquí recuerde el Problema 5-72.)

b) Pruebe que hay una función polinomial f de grado $2n - 1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

Solución. *a)* Obviamente f tendrá que ser de la forma

$$f(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)^2(ax + b)$$

(debido a que cada $x_j, j \neq i$ es una raíz doble, por el Problema 5-72). Por tanto, es suficiente mostrar que a y b pueden elegirse de modo que $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$. Si escribimos f en la forma $f(x) = g(x)(ax + b)$, entonces debemos resolver

$$[g(x_i)x_i] \cdot a + g(x_i) \cdot b = a_i$$

$$[g'(x_i)x_i + g(x_i)] \cdot a + g'(x_i) \cdot b = b_i$$

Estas ecuaciones pueden siempre resolverse porque

$$[g(x_i)x_i] \cdot g'(x_i) - [g'(x_i)x_i + g(x_i)]g(x_i) = [g(x_i)]^2 \neq 0$$

b) Sea f_i la función construida en la parte *a)*, y sea $f = f_1 + \ldots + f_n$.

Problema 5-75 Suponga que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinomial f, pero que a y b no son raíces dobles, de modo que podemos escribir $f(x) = (x - a)(x - b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.

a) Pruebe que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recuerde que a y b son raíces consecutivas.)

b) Pruebe que hay algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. [Dibuje un grafo ilustrativo. Compare el signo de $f'(a)$ y $f'(b)$.]

c) Ahora pruebe el mismo hecho, aun si a y b son raíces múltiples. (Si $f(x) = (x - a)^m(x - b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considere la función polinomial $h(x) = f'(x)/(x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}$.)

Este teorema fue probado por el matemático francés Rolle, en relación con el problema de aproximar raíces de polinomios, pero el resultado no fue establecido originalmente en términos de derivadas.

Solución. *a)* Si $g(a)$ y $g(b)$ tienen diferentes signos, entonces $g(x)$ debería ser 0 para algún x de $]a, b[$, lo cual implica que $f(x) = 0$, contradiciendo el hecho de que a y b son raíces consecutivas.

b) Tenemos $f'(x) = (x - b)g(x) + (x - b)g(x) + (x - a)(x - b)g'(x)$, de manera que

$$f'(a) = (a - b)g(a),$$
$$f'(b) = (b - a)g(b).$$

Como $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo, $f'(a)$ y $f'(b)$ tienen diferentes signos. Así, $f'(x) = 0$ para algún x en $]a, b[$, porque f' es una función continua. (Vea Fig. 5-14.)

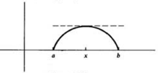


Figura 5-14

c) Debido a que $f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n g(x) + (x-a)^m n(x-b)^{n-1} g(x) + (x-a)^m (x-b)^n g'(x)$, tenemos

$$h(a) = m(a-b)g(a),$$
$$h(b) = n(a-b)g(b),$$

de modo que $h(a)$ y $h(b)$ tienen diferentes signos, y $h(x) = 0$ para algún x en $]a, b[$, lo cual implica que $f'(x) = 0$.

Problema 5-76 Suponga que $f(x) = xg(x)$ para alguna función $g(x)$ continua en 0. Pruebe que f es derivable en 0, y encuentre $f'(x)$ en términos de g.

Solución. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hg(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} g(h) = g(0)$ porque g es continua en 0.

Problema 5-77 • Suponga que f es derivable en 0, y que $f(0) = 0$. Pruebe que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0. (¿Qué ocurre si trata de escribir $g(x) = f(x)/x$?)

Solución. Sea

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

Entonces $f(x) = xg(x)$ para todo x, y

$$g(0) = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x)$$

y, por tanto, g es continua en 0.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Halle las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$ *Resp.:* $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$
2. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4.$ *Resp.:* $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$
3. $y = ax^2 + bx + c.$ *Resp.:* $y' = 2ax + b$
4. $y = -\frac{5x^3}{a}.$ *Resp.:* $y' = -\frac{15x^2}{a}$
5. $y = at^m + bt^{m+n}.$ *Resp.:* $y' = mat^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$
6. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$ *Resp.:* $y' = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
7. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2.$ *Resp.:* $y' = -\frac{\pi}{x^2}$
8. $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}.$ *Resp.:* $y' = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$
9. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}.$ *Resp.:* $y' = \frac{8}{3}x^{5/3}$
10. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$ *Resp.:* $y' = \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

11. $y = \frac{a + bx}{c + dx}$. *Resp.:* $y' = \frac{bc - ad}{(c + dx)^2}$

12. $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$. *Resp.:* $y' = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$

13. $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}$. *Resp.:* $y' = \frac{1 - 4x}{x^2(2x - 1)^2}$

14. $y = \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$. *Resp.:* $y' = \frac{1}{\sqrt{z}\,(1 - \sqrt{z})^2}$

15. $y = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$. *Resp.:* $y' = 5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x$

16. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$. *Resp.:* $y' = \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}$

17. $y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$. *Resp.:* $y' = \frac{-2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$

18. $y = 2t \operatorname{sen} t - (t^2 - 2) \cos t$. *Resp.:* $y' = t^2 \operatorname{sen} t$

19. $y = x \operatorname{cotg} x$. *Resp.:* $y' = \operatorname{cotg} x - \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Halle la derivada de las siguientes funciones (aplique la regla para derivar funciones compuestas):

20. $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$. *Resp.:* $y' = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x)$

21. $y = \left(\frac{ax + b}{c}\right)^3$. *Resp.:* $y' = \frac{3a}{c}\left(\frac{ax + b}{c}\right)^2$

22. $f(y) = (2a + 3by)^2$. *Resp.:* $f'(y) = 12ab + 18b^2 y$

23. $y = (3 + 2x^2)^4$. *Resp.:* $y' = 16x(3 + 2x^2)^3$

24. $y = \frac{3}{56(2x - 1)^7} - \frac{1}{24(2x - 1)^6} - \frac{1}{40(2x - 1)^5}$. *Resp.:* $y' = \frac{x^2 - 1}{(2x - 1)^8}$

25. $y = \sqrt{1 - x^2}$. *Resp.:* $y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$

26. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$. *Resp.:* $y' = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a + bx^3)^2}}$

27. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$. *Resp.:* $y' = -\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} - 1}$

28. $y = (3 - 2 \operatorname{sen} x)^5$. *Resp.:* $y' = -10 \cos x (3 - 2 \operatorname{sen} x)^4$

29. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$. *Resp.:* $y' = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$

30. $y = \sqrt{\operatorname{cotg} x} - \sqrt{\operatorname{cotg} \alpha}$. *Resp.:* $y' = \frac{-1}{2 \operatorname{sen}^2 x \sqrt{\operatorname{cotg} x}}$

31. $y = 2x + 5 \cos^3 x$. *Resp.:* $y' = 2 - 15 \cos^2 x \operatorname{sen} x$

32. $x = \operatorname{cosec}^2 t + \sec^2 t$. *Resp.:* $x' = \frac{-16 \cos 2t}{\operatorname{sen}^3 2t}$

33. $f(x) = -\frac{1}{6(1 - 3 \cos x)^2}$. *Resp.:* $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(1 - 3 \cos x)^3}$

34. $y = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$. *Resp.:* $y' = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}$

35. $y = \sqrt{\frac{3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{5}}$. *Resp.:* $y' = \frac{3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x}{2\sqrt{15 \operatorname{sen} x - 10 \cos x}}$

36. $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{2 \cos x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} + \dfrac{3 \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$

37. $y = \operatorname{sen} 3x + \cos \dfrac{x}{5} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$. *Resp.:* $y' = 3 \cos 3x - \dfrac{1}{5} \operatorname{sen} \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$

38. $y = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg} \dfrac{a}{x}$. *Resp.:* $y' = (2x - 5)\cos(x^5 - 5x + 1) - \dfrac{a}{x^2 \cos^2 \dfrac{a}{x}}$

39. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$. *Resp.:* $f'(x) = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x + \beta)$

40. $f(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \varphi)$. *Resp.:* $f'(t) = \operatorname{sen}(2t + \varphi)$

41. $y = \operatorname{sen}^3 5x \cos^2 \dfrac{x}{3}$. *Resp.:* $y' = 15 \operatorname{sen}^2 5x \cos 5x \cos^2 \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{3} \operatorname{sen}^3 5x \cos \dfrac{x}{3} \operatorname{sen} \dfrac{x}{3}$

42. $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{4x + 3}{(x-2)^3}$

43. $y = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

44. $y = \left(\dfrac{a + bx^n}{a - bx^n}\right)^m$. *Resp.:* $y' = \dfrac{2abmnx^{n-1}(a + bx^n)^{m-1}}{(a - bx^n)^{m+1}}$

45. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$

46. $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{3x^2 + 2(a+b+c)x + ab + ac + bc}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$

47. $z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}$. *Resp.:* $\dfrac{dz}{dy} = z' = D_y = \dfrac{1 + 2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y + \sqrt{y})^2}}$

48. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2ay - y^2}}$. *Resp.:* $x' = \dfrac{dx}{dy} = D_y = \dfrac{y - a}{\sqrt{(2ay - y^2)^3}}$

49. $y = \sqrt{\alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}$. *Resp.:* $y' = \dfrac{(\alpha - \beta) \operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x}}$

50. $f(t) = (2t + 1)(3t + 2)\sqrt[3]{3t + 2}$. *Resp.:* $f'(t) = 2(7t + 4)\sqrt[3]{3t + 2}$

Calcule la derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones y, dadas en forma paramétrica:

51. $\begin{cases} x = 2t - 1. \\ y = t^3. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}t^2$

52. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}. \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{-2t}{t+1}$

53. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}. \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{-2t}{1-t^2}$

54. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}. \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{t(2-t^3)}{1-t^3} = \dfrac{dy}{dx}$

55. $\begin{cases} x = \sqrt{t}. \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$

56. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}. \\ y = \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{t + 1}{t(t^2 + 1)}$

57. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t). \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t). \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$

58. $\begin{cases} x = a \cos^2 t. \\ y = b \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$

59. $\begin{cases} x = a \cos^3 t. \\ y = b \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t$

60. $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$ *Resp.:* $y' = \frac{dy}{dx} = +\operatorname{tg}^3 t$

61. Demuestre que la función dada por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ satisface a la ecuación

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Halle la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas y:

62. $2x - 5y + 10 = 0.$ *Resp.:* $y' = \frac{2}{5}$

63. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ *Resp.:* $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

64. $x^3 + y^3 = a^3.$ *Resp.:* $y' = -\frac{x^2}{y^2}$

65. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0.$ *Resp.:* $y' = -\frac{x(3x + 2y)}{x^2 + 2y}$

66. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$ *Resp.:* $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

67. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$ *Resp.:* $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

68. $y^3 = \frac{x - y}{x + y}.$ *Resp.:* $y' = \frac{2y^2}{3(x^2 - y^2) + 2xy} = \frac{1 - y^3}{1 + 3xy^2 + 4y^3}$

69. $y = x - 0{,}3 \operatorname{sen} y.$ *Resp.:* $y' = \frac{10}{10 - 3 \cos y}$

70. $a \cos^2(x + y) = b.$ *Resp.:* $y' = -1$

71. $\operatorname{tg} y = xy.$ *Resp.:* $y' = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$

72. Halle y' en el punto $M(1, 1)$ si $2y = 1 + xy^3$. *Resp.:* $y' = -1$

73. Halle y' en el punto $P(2, 1)$ si $(x + y)^3 = 27(x - y)$. *Resp.:* $y' = 0$

74. Encuentre la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$. *Resp.:* $f'(0) = 0$

75. Pruebe que si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

Resp.:

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x)f(a) - af(a + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f(a)}{\Delta x} - a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f(a) - af'(a)$$

76. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ se anulan en $x = 0$ y son derivables en $x = 0$. Pruebe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

si $g'(0) \neq 0$. Use esto para calcular el límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

77. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ es derivable en x_0?

Resp.: $a = 2x_0, b = -x_0^2$

Nota. Tenga en cuenta que la función debe ser continua en x_0 y que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

78. ¿La función $f(x) = |x|^3$ es derivable en $x = 0$?

79. Pruebe que si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces

$$\lim_{n \to \infty} n\left[f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right] = f'(x_0)$$

80. Partiendo de la ecuación

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

obtenga fórmulas para

a) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$; *b)* $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots + n^2x^n$.

(Derivando obtenemos la primera, y con algunas transformaciones llegamos a la segunda.)

81. Halle la segunda derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$. *Resp.:* $y'' = 56x^6 + 210x^4$

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$. *Resp.:* $y'' = 2\cos 2x$

c) $y = \dfrac{1}{1 + x}$.

82. Demuestre que la función $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$ satisface a la ecuación diferencial $1 + y'^2 = 2yy''$.

83. Halle y''', si $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$. *Resp.:* $y''' = 6$

84. Halle $f'''(3)$, si $f(x) = 5(2x - 3)^5$. *Resp.:* $f'''(3) = 4320$

85. Halle y^{VI}, si $y = \operatorname{sen} 2x$. *Resp.:* $y^{VI} = -64 \operatorname{sen} 2x$

86. La ecuación del movimiento de un punto, sobre el eje Ox, es $x = 100 + 5t - 0{,}001 \cdot t^3$. Halle la velocidad y la aceleración de dicho punto para los instantes $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 10$.

Nota. Recuerde que v = velocidad instantánea $= \dfrac{dx}{dt}$ y que aceleración instantánea

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Resp.: La velocidad $v = 5$; $4{,}997$; $4{,}7$. La aceleración $a = 0$; $-0{,}006$; $-0{,}06$.

87. Por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se mueve el punto con una velocidad angular ω. Halle la ley del movimiento de su proyección M_1 sobre el eje Ox, si en el momento $t = 0$ el punto ocupa la posición $M_0(a, 0)$. Halle la velocidad y la aceleración del movimiento del punto M_1. ¿A qué es igual la velocidad y la aceleración del punto M_1 en el momento inicial y en el momento en que pasa por el origen de coordenadas? ¿Cuáles son los mayores valores absolutos de la velocidad y la aceleración del punto M_1?

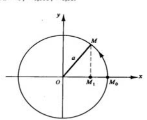


Figura 5-15

Resp.: La ley del movimiento del punto M_1 es $x = a \cos \omega t$; la velocidad en el momento t es $v = -a\omega \operatorname{sen} \omega t$; la aceleración en el momento t es $-a\omega^2 \cos \omega t$. La velocidad inicial es igual a 0; la aceleración inicial es $-a\omega^2$; la velocidad cuando $x = 0$ es $\pm a\omega$; la aceleración cuando $x = 0$ es 0. El valor máximo de la magnitud absoluta de la velocidad es $a\omega$. El valor máximo de la magnitud absoluta de la aceleración es $a\omega^2$.

88. Empleando la fórmula de Leibniz, halle $y^{(n)}$ si

a) $y = (1 - x^2)\cos x$. *Resp.:* $y^{(n)} = (1 - x^2)\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x + \dfrac{(n-2)\pi}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$. *Resp.:* $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[x - (2n - 1)]$

Nota. Halle primero la derivada n-ésima de $\cos x$ en *a)* y de $\sqrt{x}$ en *b)*. (Vea el ejercicio siguiente para un ejemplo.)

89. Halle la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen} x$.

Resp.:

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $y = \cos 2x$. *Resp.:* $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \dfrac{1}{1 + x}$. *Resp.:* $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(1 + x)^{n+1}}$

d) $y = \frac{1+x}{1-x}$. *Resp.:* $y^{(n)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$

e) $y = \text{sen}^2 x$. *Resp.:* $y^{(n)} = 2^{n-1} \text{ sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$

90. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ para las siguientes funciones:

a) $\begin{cases} x = a\cos t. \\ y = a \text{ sen } t. \end{cases}$ *Resp.:* $y'' = -\frac{1}{a\,\text{sen}^3 t}$

b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t. \\ y = a \text{ sen}^3 t. \end{cases}$ *Resp.:* $y'' = \frac{1}{3a\cos^4 t \text{ sen } t}$

c) $\begin{cases} x = \cos 2t. \\ y = \text{sen}^2 t. \end{cases}$ *Resp.:* $y'' = 0$

91. Halle $\frac{d^3y}{dx^3}$ para $\begin{cases} x = \sec t. \\ y = \text{tg } t. \end{cases}$ *Resp.:* $y'' = \frac{3\cot g^4 t}{\text{sen } t}$

92. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $\begin{cases} x = a(\theta - \text{sen } \theta). \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$ *Resp.:* $y'' = -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$

93. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ si *a*) $y^2 = 2px$; *b*) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resp.: *a*) $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$; *b*) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$

94. *a*) Halle y'' en el punto (0, 1), si $x^4 - xy + y^4 = 1$.

b) Halle y'' en el punto (1, 1), si $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

c) Halle $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto (1, 1), si $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

d) Halle $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $x^2 + y^2 = a^2$.

Resp.: *a*) $-\frac{1}{16}$; *b*) $\frac{111}{256}$; *c*) $\frac{1}{3}$; *d*) $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3a^2x}{y^5}$

95. ¿Para qué valores *a*, *b* y *c* la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \le x_0 \\ ax^2 + bx + c \text{ si } x > x_0 \end{cases}$$

tiene una segunda derivada en x_0?

Resp.: $a = 3x_0$, $b = -3x_0^2$, $c = x_0^3$

Aplicaciones geométricas de la derivada.

96. ¿Qué ángulos forman con el eje de las *x* las tangentes a la curva $y = x - x^2$ en los puntos cuyas abscisas son: *a*) $x = 0$; *b*) $x = 1/2$; *c*) $x = 1$?

Resp.: *a*) 45°; *b*) 0°; *c*) 135°

97. ¿Qué ángulos forman con el eje de abscisas, al cortarse con éste en el origen de coordenadas, *a*) las sinusoides $y = \text{sen } x$ y $y = \text{sen } 2x$, *b*) la tangentoide $y = \text{tg } x$?

Resp.: *a*) 45°; arc tg 2 ≈ 63° 26′
b) 45°

98. Halle los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sean paralelas al eje de abscisas.

Resp.: (0, 20); (1, 15); (−2, −12)

99. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

Resp.: $(1, -3)$

100. Halle la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $x = y$ en el punto $(1, 1)$.

Resp.: $y = x^2 - x + 1$

101. Determine la pendiente (o coeficiente angular) de la tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ en el punto $(1, 2)$.

Resp.: $m = -\frac{1}{11}$

102. ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

Resp.: $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

103. Escriba las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es 4.

Resp.: Ecuación de la tangente: $x - 4y + 4 = 0$
Ecuación de la normal: $4x + y - 18 = 0$

104. Escriba las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva en el punto dado: *a)* $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en $(-2, 5)$; *b)* $y = \operatorname{tg} 2x$ en $(0, 0)$.

Resp.: *a)* $y - 5 = 0$; $x + 2 = 0$

b) $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

105. Escriba las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ en el punto $(2, 2)$.

Resp.: $7x - 10y + 6 = 0$
$10x + 7y - 34 = 0$

106. Escriba la ecuación de la tangente a la curva $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$ en el origen de coordenadas y en el punto $t = \frac{\pi}{4}$.

Resp.: $y = 0$; $(\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} = 0$

107. Escriba las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $x^2 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto de ordenada $y = 3$.

Resp.: $5x + 6y - 13 = 0$; $6x - 5y + 21 = 0$

108. Escriba la ecuación de la tengente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $(1, 1)$.

Resp.: $x + y - 2 = 0$

109. Escriba las ecuaciones de las tangentes y de las normales a la curva $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en sus puntos de intersección con el eje de abscisas.

Resp.: En $(1, 0)$: $y = 2x - 2$; $y = \frac{1 - x}{2}$
En $(2, 0)$: $y = -x + 2$; $y = x - 2$
En $(3, 0)$: $y = 2x - 6$; $y = \frac{3 - x}{2}$

110. Escriba las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto $(1, 2)$.

Resp.: $14x - 13y + 12 = 0$; $13x + 14y - 41 = 0$

111. Demuestre que el segmento de tangente a la hipérbola $xy = a^2$, comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

112. Demuestre que en la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ el segmento tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene magnitud constante e igual a a.

113. Demuestre que las tangentes al folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ en los puntos de intersección con la parábola $y^2 = ax$ son paralelas al eje de las y.

114. Demuestre que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de la tangente en un punto cualquiera a la parábola $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ es constante e igual a a.

115. Demuestre que las normales a la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

116. Halle el ángulo de intersección de las parábolas cuyas ecuaciones son $y = (x-2)^2$ y $y = -4 + 6x - x^2$.

Resp.: 40° 36'

117. ¿Qué ángulo forman entre sí las parábolas $y = x^2$ y $y = x^3$ al cortarse?

Resp.: En el punto (0,0) las parábolas son tangentes entre sí; en el punto (1,1) se cortan bajo el ángulo de arc tg $\frac{1}{7} \approx 8° 8'$.

118. Demuestre que las curvas $y = 4x^2 + 2x - 8$ y $y = x^3 - x + 10$ son tangentes entre sí en el punto (3,34). ¿Ocurrirá lo mismo en el punto (−2,4)?

119. Demuestre que las hipérbolas $xy = a^2$ y $x^2 - y^2 = b^2$ se cortan entre sí formando un ángulo recto.

120. Demuestre que el círculo $x^2 + y^2 = 8ax$ y la cisoide $(2a - x)y^2 = x^3$,
a) Son perpendiculares en el origen.
b) Se cortan en ángulo de 45° en otros dos puntos.

121. Se da la parábola $y^2 = 4x$. Calcule la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal en el punto (1,2).

Resp.: $S_t = S_n = 2$; $t = n = 2\sqrt{2}$

122. Demuestre que la longitud del segmento normal a cualquier punto de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ es igual al radio polar de dicho punto.

123. Demuestre que la longitud del segmento subnormal de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$, en un punto cualquiera de la misma, es igual a la abscisa de dicho punto.

124. Demuestre que los segmentos subtangentes de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, en los puntos de abscisas iguales, son iguales entre sí. ¿Qué procedimiento de construcción de la tangente a la elipse se desprende de lo antedicho?

125. Halle la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal a la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Resp.: $T = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2}$; $N = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}$; $S_t = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2}$; $S_n = a \operatorname{sen} t$.

126. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = x - \frac{x^2}{100}$, siendo la unidad de distancia un metro, el eje de las x horizontal y el origen el punto desde el cual se lanza la pelota. *a)* ¿Con qué ángulo se lanza la pelota? *b)* ¿Con qué ángulo dará la pelota contra una pared vertical, situada a 75 m del punto de partida? *c)* Si la pelota cae en una azotea horizontal de 16 m de alto, ¿con qué ángulo dará en la azotea? *d)* Si la pelota se ha lanzado desde la azotea de un edificio de 24 m de alto, ¿con qué ángulo dará en el suelo? *e)* Si se ha lanzado desde la cumbre de una cuesta, inclinada hacia abajo en ángulo de 45°, ¿con qué ángulo dará en el suelo?

127. Halle los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales de cada una de las siguientes curvas:

a) $y = 5x - 2x^2$. *Resp.:* Horizontal, (5/4, 25/8)
b) $3y^2 - 6y - x = 0$. *Resp.:* Vertical, (−3,1)
c) $x^2 + 6xy + 25y^2 = 16$. *Resp.:* Horizontal, (3, −1), (−3,1) Vertical, (5, −3/5), (−5, 3/5)
d) $x^2 - 8xy + 25y^2 = 81$.
e) $x^2 - 24xy + 169y^2 = 25$.
f) $169x^2 + 10xy + y^2 = 144$.

CAPITULO 6

Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en su dominio, entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{6-1}$$

con $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

De la ecuación (6-1) podemos concluir que cuando Δx se aproxima a cero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima a $f'(x)$. O si se designa por ε la diferencia entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $f'(x)$, es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \ \Delta x \neq 0 \tag{6-2}$$

entonces $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad (6-2) por Δx se tiene

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \tag{6-3}$$

Por tanto, si Δx se aproxima a cero, ε tiende a cero y $\varepsilon\Delta x$ se aproxima a cero. Es decir, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Definición. Si $y = f(x)$ es una función derivable en su dominio, entonces

a) dx se llama diferencial de x, y se define por la relación $dx = \Delta x$.
b) dy se llama diferencial de y, y se define por la relación $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ o $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$.

La Figura 6-1 ilustra este concepto.

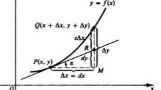


Figura 6-1

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MR}{PM} = f'(x)$$
$$PM = dx = \Delta x$$
$$MR = f'(x)\Delta x = dy$$
$$\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x$$
$$RQ = \varepsilon\Delta x$$

Nota. De $dx = \Delta x$ y $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, al dividir las ecuaciones entre sí obtenemos

$$dy = f'(x)dx \text{ si } dx \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{6-4}$$

La igualdad (6-4) expresa la derivada como cociente de dos diferenciales. A veces se usa la notación dy/dx para designar la derivada de y con respecto a x, simbolismo que no se debe confundir con el que acabamos de definir. Sin embargo, a veces es conveniente considerar la derivada como cociente de dos diferenciales.

Diferenciales de órdenes superiores

Se llama diferencial de segundo orden la diferencial de la diferencial de primer orden

$$d^2y = d(dy)$$

En forma análoga se determinan las diferenciales de tercer orden y órdenes sucesivos.

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x) \cdot \Delta x] = [f'(x)\Delta x]'\Delta x = f''(x) \cdot \Delta x \cdot \Delta x = f''(x) \cdot$$
$$\cdot \Delta x^2 = f''(x)dx^2 ; \Delta x^2 = (dx)^2$$

Teorema. Si $y = f(x)$ es derivable para todos los valores de x en su dominio, entonces $dy = f'(x)dx$ si x es o no una variable independiente.

Demostración. Sea $y = f(x)$ y $x = g(t)$, entonces $y = f[g(t)]$ y su derivada está dada por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{6-5}$$

y su diferencial por

$$dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt \tag{6-6}$$

Remplazando (6-5) en (6-6) se tiene

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \tag{6-7}$$

La diferencial de $x = g(t)$ es

$$dx = \frac{dx}{dt} dt \tag{6-8}$$

De (6-7) y (6-8) se obtiene $dy = \frac{dy}{dx} dx = f'(x)dx$. Además muestra que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, es decir, el cociente de dos diferenciales a pesar de ser $x = g(t)$.

Algebra de diferenciales

1. $d(c) = 0$.
2. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.
3. $d(cu) = cdu$.
4. $d(u + v) = du + dv$.
5. $d(uv) = udv + vdu$.
6. $d(u/v) = \dfrac{udu - vdv}{v^2}$
7. $d(u^n) = nu^{n-1}du$, u es función de función.

Nota. Muestre que el teorema anterior no se cumple para diferenciales de orden superior cuando se tiene una función compuesta.

En efecto, sea $y = f(x)$ y $x = g(t) \Rightarrow y = f[g(t)]$.
Como $dy = f'(x) \cdot dx$ y $y = f[g(t)]$, entonces $dy = f'(x) \cdot g'(t)dt$.
Ahora

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x) \cdot g'(t)dt]dt = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

Recuerde que $\Delta t = dt$.
Análogamente se verifica que $d^3y = d(d^2y) = \ldots = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx \cdot d^2x + f'(x)d^3x$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 6-1 Si $y = x^2 - 3x + 1$, halle Δy y dy: *a)* para cualquier x; *b)* para $x = 2, \Delta x = 0{,}1$; *c)* $x = 2, \Delta x = 0{,}01$; *d)* $x = 2, \Delta x = 0{,}001$.

Solución. *a)* Como $y = x^2 - 3x + 1$, entonces $\Delta y + y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 \Rightarrow (x^2 - 3x + 1) + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \Rightarrow \Delta y = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$.
También $dy = f'(x) \cdot dx$ o $dy = (2x - 3)\,dx = (2x - 3)\,\Delta x$.
El resultado de las partes *b)*, *c)* y *d)* está dado en la siguiente tabla, con $\Delta y = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = (2x - 3)\Delta x$ y $\varepsilon\Delta x = \Delta y - dy$.

x	Δx	Δy	dy	$\varepsilon \cdot \Delta x$
2	0,1	0,11	0,1	0,01
2	0,01	0,0101	0,01	0,0001
2	0,001	0,001001	0,001	0,000001

La tabla muestra que a medida que x se acerca a cero la diferencia $\Delta y - dy$ se hace más pequeña. Por tanto, dy es una aproximación de Δy cuando Δx es pequeño.

Problema 6-2 Halle el valor aproximado de $\sqrt[3]{28}$ sin usar tablas.

Solución. Sea $y = \sqrt[3]{x}$, entonces $y + \Delta y = \sqrt[3]{x + \Delta x}$.
Tomando a $x = 27$, $\Delta x = 1$, entonces $y = \sqrt[3]{27} = 3$ y $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{x + \Delta x}$ o $\sqrt[3]{28} = y + \Delta y$.
Se obtiene una aproximación para Δy hallando dy:

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{3x^{2/3}}\,dx$$

Como $dx = \Delta x$ y $\Delta x = 1$ se toma a $dx = 1$. Así:

$$dy = \frac{1}{3(27)^{2/3}}(1) = \frac{1}{27}$$

Como $\Delta y \approx dy$ se tiene $\Delta y \approx 1/27$. Por tanto:

$$y + \Delta y \approx 3 + \frac{1}{27} \text{ o } y + \Delta y = 3{,}037; \qquad \therefore\ \sqrt[3]{28} = 3{,}037$$

Problema 6-3 Halle el volumen aproximado de un recipiente esférico, cuyo radio exterior es de 4 cm y su espesor 1/4 cm.

Solución. Sea r = radio en centímetros de esfera.
V = número de centímetros cúbicos en el volumen de una esfera.
$-\Delta V$ = número de centímetros cúbicos en el volumen del recipiente esférico.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3; \text{ por tanto, } dV = 4\pi r^2\, dr$$

Al sustituir $r = 4$ y $dr = -1/4$, en lo anterior, se obtiene

$$dV = 4\pi(4)^2(-1/4) = +16\pi$$

Concluimos que el volumen del recipiente esférico es de aproximadamente 16π cm³.

Problema 6-4 Un error positivo de 0,01 cm se comete al medir el radio de una esfera de 12 cm. ¿Qué error se produce al calcular el volumen de la esfera? Obtenga una respuesta exacta y una aproximada empleando diferenciales.

Solución. *Exacta.* Volumen calculado $= v + \Delta v = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 = \frac{4}{3}\pi(12{,}01)^3 = 7256{,}34$ cm³.

Siendo v y r el volumen y radio verdaderos, mientras que Δv y Δr son los errores del volumen y radio.

Volumen verdadero $= v = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 7238{,}229$ cm³.

Error en el volumen $= \Delta v = 18{,}111$ cm³.

Aproximada. dv es una aproximación de Δv y de $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ se tiene

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 \Delta r = 4\pi(12^2)\cdot 0{,}01 = 18{,}096 \text{ cm}^3$$

La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado, calculado empleando diferenciales, es de 0,015 cm³.

Problema 6-5 *a)* Si $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ halle dy. *b)* Si $2x^2y^2 - 2x^3 + 5y^3 + 6xy^2 = 5$, con x y y funciones de una tercer variable t, halle $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución. *a)* $dy = \dfrac{(2x+1)d(\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}\,d(2x+1)}{(2x+1)^2} = \dfrac{x(2x+1)(x^2+1)^{-1/2}dx - 2(x^2+1)^{1/2}dx}{(2x+1)^2} = \dfrac{(2x^2+x)dx - 2(x^2+1)dx}{(2x+1)^2(x^2+1)^{3/2}} = \dfrac{x-2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$; *b)* $4xy^2dx + 4x^2dy - 9x^2dx + 15y^2dy + 6y^2dx + 12xydy = 0\ldots$

Problema 6-6 Muestre por inducción que $d^n f(x) = d[d^{n-1}f]$ para $n \geq 1$.

Solución. Para $n = 1$ se verifica.

Si se verifica para un n dado, se tiene que $d(d^n f)(x) = d[f^{(n)}(x)\overline{\Delta x}^n] = \overline{\Delta x}^n df^{(n)}(x) = \overline{\Delta x}^n (f^{(n)})'(x)\Delta x = \overline{\Delta x}^{n+1} f^{(n+1)}(x) = d^{n+1}f(x)$.

Problema 6-7 ¿En cuánto aumenta aproximadamente el lado de un cuadrado si su área aumenta de 9 m² a 9,1 m²?

Solución. Si x es el área del cuadrado y y el lado del mismo tendremos que $y = \sqrt{x}$. Por las condiciones del problema, $x = 9$; $\Delta x = 0{,}1$.

Calculamos aproximadamente el incremento Δy del lado del cuadrado

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}016 \text{ m}$$

Problema 6-8 Halle el valor aproximado de sen 31°.

Solución. $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$, $dy = \cos x \cdot \Delta x$; $\Delta y \approx dy \Rightarrow \operatorname{sen}(x + \Delta x) = \Delta y + \operatorname{sen} x = dy + \operatorname{sen} x = \cos x\, \Delta x + \operatorname{sen} x$.

Tomando a $x = \text{arc } 30°$ y $\Delta x = \text{arc } 1° = \pi/180$ tendremos que $\operatorname{sen}(x + \Delta x)$ $\operatorname{sen} 31° \approx \operatorname{sen} 30° + \frac{\pi}{180} \cos 30° = 0{,}5 + 0{,}017 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}515$.

Problema 6-9 ¿Para qué valores de x se puede usar $\sqrt[5]{x}$ en vez de $\sqrt[5]{x + 1}$ si el error permitido debe ser menor de 0,001?

Solución. Cuando $y = x^{1/5}$ y $dx = 1$, $dy = \frac{1}{5}x^{-4/5}dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

Si $\frac{1}{5}x^{-4/5} < 10^{-3} \Rightarrow x^{-4/5} < 5 \cdot 10^{-3}$ y $x^{-4} < 5^5 \cdot 10^{-15}$.

Si $x^{-4} < 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16} \Rightarrow x^4 > \frac{10^{16}}{31250}$ y $x > \frac{10^4}{\sqrt[4]{31250}} = 752{,}1$.

Problema 6-10 Halle el valor aproximado de sen 31°.

Solución. $\operatorname{sen} 31° = \operatorname{sen}(30° + 1°) = \operatorname{sen}(\pi/6 + \pi/180)$; $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = \pi/6$ y $h = \pi/180$. Entonces $df(x, h) = hf'(x) = h \cdot \cos x$ y $d(x + h) \approx f(x) + df(x, h)$, que se convierte en:

$$\operatorname{sen} 31° \approx \operatorname{sen} \pi/6 + \pi/180 \cos \pi/6 = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2 \cdot 180} = 0{,}5 + 0{,}0512 = 0{,}51512$$

Una tabla con cinco decimales da sen 31° = 0,51504.

Problema 6-11 Un tubo de hierro de 10 pies de largo tiene un diámetro exterior de 4 pulgadas y de espesor 1/4 de pulgada. Emplee una diferencial para aproximar el peso del tubo si el hierro pesa 450 libras por pie cúbico.

Solución. El diámetro interior del cilindro es $4 - 2\frac{1}{4} = 7/2$ pulgadas; la longitud es $l = 10$ pies; el radio exterior, $r = 1/6$ pie; el espesor, $dr = \frac{-1}{4 \cdot 12} = -1/48$ pie.

El volumen del cilindro es $V(r) = 10\pi r^2$; entonces $dV(r, dr) = V'(r)dr = 20\pi r dr$ y $dV(1/6, -1/48) = 20\pi \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{-1}{48} = -\frac{10\pi}{144} = -0{,}218 \text{ pies}^3$.

Este es el valor aproximado del volumen del cilindro de 10 pies si el radio se reduce de 2 pulgadas a 7/4 de pulgada. Entonces el volumen del hierro es aproximadamente $10\pi/144$ pies cúbicos y el peso del tubo aproximadamente $(10\pi/144) \cdot 450 = 98{,}2$ libras. Empleando incrementos, se halla que el peso es 92,04 libras. Si se toma el radio interior como r y empleamos diferenciales como una aproximación, se halla que el peso es 85,9 libras.

Así, si aproximamos el peso usando diferenciales, tenemos un error en exceso de 6 libras, es decir, un exceso de 6,5 %.

Problema 6-12 Halle el volumen de bolas de acero, suponiendo que son esferas perfectas, midiendo su diámetro en una producción en serie.

Solución. La máquina que se emplea para medir el diámetro no da el valor exacto de d, sino un valor aproximado $d + h$. El error relativo en esta medida es h/d. El volumen de la esfera es $V(d) = \frac{\pi}{6} d^3$. $\therefore \; dV(d, h) = \frac{\pi}{2} d^2 h$. El error relativo en el volumen es

$$\frac{\Delta V(d, h)}{V(d)} \approx \frac{dV(d, h)}{V(d)} = 3\frac{h}{d}$$

Esto dice que el error relativo en la medida del volumen es tres veces el error relativo en la medida original del diámetro.

Problema 6-13 Halle el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^2$ para $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$. ¿Cuál es el porcentaje de error de la aproximación de $\Delta y \approx dy$?

Solución. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$; $dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$. Entonces, $\Delta y = 2(20)(0{,}1) + (0{,}1)^2 = 4{,}01$, $dy = 2(20)(0{,}1) = 4{,}00$; si $x = 20$ y $\Delta x = 0{,}01$. El porcentaje de error en la aproximación $\Delta y \approx dy$ es

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| \cdot 100\,\% = \left|\frac{4{,}01 - 4}{4{,}01}\right| \cdot 100\,\% = 0{,}25\,\%.$$

Remplazar Δy por dy es equivalente a remplazar el área rayada por el área de los rectángulos de área $x\Delta x$ y despreciar la del cuadrado pequeño $(\Delta x)^2$.

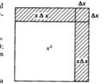


Figura 6-2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si A es el área de un cuadrado de lado x, halle dA. Construya una figura que muestre el cuadrado, dA y ΔA.
Resp.: $dA = 2xdx$

2. Halle un valor aproximado del error que puede cometerse al calcular el volumen y el área de un cubo de arista 6 cm si se comete un error de 0,02 cm al medir la arista.
Resp.: Volumen, $\pm 2{,}16$ cm^3; área, $\pm 1{,}44$ cm^2

3. Las fórmulas para el área y el volumen de una esfera son $S = 4\pi r^2$ y $V = 4/3\pi r^3$. Si al medir el radio se obtiene 3 m: *a)* ¿cuáles son los errores máximos aproximados de S y V si las medidas son seguras hasta 0,01 m?; *b)* ¿cuál es en cada caso el error máximo expresado en tanto por ciento.

Nota. Si du es el error de u, la razón du/u = error relativo; $100\frac{du}{u}$ = error expresado en tanto por ciento.
Resp.: *a)* S, $0{,}24\pi$ m^2; V, $0{,}36\pi$ m^3. *b)* S, 2/3 %; V, 1 %

4. Demuestre por medio de diferenciales que, aproximadamente,

$$\frac{1}{x + dx} = \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2}$$

5. Halle una fórmula aproximada para el volumen de un tubo cilíndrico delgado de extremos abiertos si el radio es r; la altura, l, y el espesor, e.
Resp.: $2\pi rle$

6. Se ha de construir una caja en forma de cubo, de 1 dm^3 de capacidad. ¿Con qué precisión debe construirse la arista interior para que el error en el volumen no sea mayor de 3 cm^3 de más o de menos?
Resp.: Error, $\leq 0{,}01$ cm

7. Si $y = x^{2/3}$ y el error posible en la medición de x es 0,9 cuando $x = 27$, ¿cuál es el error posible del valor de y? Emplee este resultado para obtener valores aproximados de $(27{,}9)^{2/3}$ y $(26{,}1)^{2/3}$.
Resp.: 0,2; 9,2; 8,8

8. Usando diferenciales halle un valor aproximado de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{66}$. *c)* $\sqrt[3]{120}$. *e)* $1/96$. *g)* $\sqrt[5]{35}$.

b) $\sqrt{98}$. *d)* $\sqrt[3]{1010}$. *f)* $1/\sqrt{51}$. *h)* $\sqrt[4]{15}$.

9. Dados sen 60° = 0,86603, cos 60° = 0,5 y 1° = 0,01745 radianes calcule, empleando diferenciales, los valores de cada una de las siguientes funciones, con cuatro decimales: *a)* sen 62°; *b)* cos 61°; *c)* sen 59°; *d)* cos 58°

Resp.: *a)* 0,8835; *b)* 0,4849; *c)* 0,8573; *d)* 0,5302

10. El tiempo de una oscilación de un péndulo se da por la fórmula

$$t^2 = \frac{\pi^2 l}{g}$$

midiéndose la longitud del péndulo l en metros, t en segundos, y siendo $g = 9{,}8$. Halle: *a)* la longitud de un péndulo que oscila una vez por segundo; *b)* la alteración en t si el péndulo en *a)* se alarga 3 mm; *c)* ¿cuánto se adelantaría o atrasaría en un día un reloj con ese error?

Resp.: *a)* 0,993 m; *b)* 0,00152 s; *c)* −2 min 10 s

11. ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro de un círculo para que el área resulte con un error menor del uno por ciento? (Vea nota del Ejercicio 3.)

Resp.: Error, $\leq 1/2$ %

12. Demuestre que si se comete un error al medir el diámetro de una esfera, el error relativo del volumen de la esfera es tres veces el error relativo del radio. (Vea nota del Ejercicio 3.)

13. Demuestre que el error relativo de la enésima potencia de un número es n veces el error relativo del número.

14. Demuestre que el error relativo de la raíz enésima de un número es $\frac{1}{n}$ del error relativo del número.

15. Cuando un bloque cúbico de cierto metal se calienta, cada arista aumenta 1/10 por 100 por grado de elevación de temperatura. Demuestre que la superficie aumenta 2/10 por 100 por grado y que el volumen aumenta 3/10 por 100 por grado.

16. Suponga que la parte principal del incremento de $f(x)$ correspondiente a $\Delta x = 0{,}2$ es 0,8. ¿Cuál es $f'(x)$?

17. Encuentre el valor de a tal que $df(a) = -0{,}8$ si $f(x) = x^2$ y $\Delta x = 0{,}2$.

Resp.: $a = -2$

18. Encuentre el incremento Δf y la diferencial df de la función $f(x) = x^3 - x$ en $x = 1$ para $\Delta x = 1$, 0,1 y 0,01.

19. ¿Cuánto varía el área S de un sector circular de radio $r = 100$ cm y ángulo central $\theta = 60°$ cuando: *a)* r se incrementa 1 cm; *b)* θ decrece 0,5°? Dé una solución exacta y una solución aproximada basada en diferenciales.

Resp.: *a)* $\Delta S = \frac{201\pi}{6}\text{ cm}^2$, $dS = \frac{100\pi}{3}\text{ cm}^2$

b) $\Delta S = ds = -\frac{125\pi}{18}\text{ cm}^2$

20. Halle el valor aproximado de tg 45° 3′ 20″. *Resp.:* 1,0019

21. Halle la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x$. *Resp.:* $dy = 3(x^2 - 1)dx$

b) $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$. *Resp.:* $dy = \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right)dx$

c) $y = \sqrt{ax + b}$. *Resp.:* $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax + b}}$

d) $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ *Resp.:* $dy = \frac{(a^2 - 2x^2)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

e) $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

f) $y = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{a}{x}}$.

g) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

h) $y = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

22. Si $x^2 + y^2 = a^2$ demuestre que $dy = -\frac{x}{y}\,dx$.

23. Halle dy en función de x, y y dx de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 20$. *Resp.:* $dy = -\frac{(4x+3y)dx}{3x+8y}$

b) $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10$.

c) $x + 4\sqrt{xy} + 2y = a$.

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

e) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

f) $\operatorname{sen}(x-y) = \cos(x+y)$.

24. Exprese la diferencial de la siguiente función compuesta en términos de la variable independiente y su diferencial:

$$s = \cos^2 z, \quad z = \frac{1}{4}(t^2 - 1)$$

Resp.: $-\frac{t}{2}\operatorname{sen}\frac{t^2-1}{2}\,dt$

25. Calcule d^2y si $y = \cos 5x$. *Resp.:* $d^2y = -25\cos 5x dx^2$

26. Si $u = \sqrt{1-x^2}$ halle d^2u. *Resp.:* $\frac{-dx^2}{(1-x^2)^{3/2}}$

27. Si $z = \frac{x^4}{2-x}$ halle d^4z. *Resp.:* $\frac{384dx^4}{(2-x)^5}$

28. Si $u = 3\operatorname{sen}(2x+5)$ halle d^nu. *Resp.:* $3\cdot 2^n\operatorname{sen}\left(2x+5+\frac{n\pi}{2}\right)dx^n$

CAPITULO 7

Razones y velocidad

Existen muchas aplicaciones del concepto de razón promedio y razón instantánea. Por razón promedio se entiende la relación

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{cambio de ordenadas}}{\text{cambio de abscisas}}$$

y por razón instantánea el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Existen muchas aplicaciones de estos dos conceptos. Por ejemplo, la cantidad de agua Q (en litros) que hay en un recipiente es función del tiempo t. Si el agua entra y sale, Q cambia en una cantidad ΔQ de un tiempo t a un tiempo $t + \Delta t$. Entonces la razón promedio de cambio de Q con respecto a t es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ (l/min) y la razón instantánea } \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ (l/min).}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 7-1 Dos barcos salen simultáneamente de un puerto: uno viaja hacia el Sur a una velocidad de 20 km por hora, el otro hacia el Este a una velocidad de 3 km por hora. Al final de 3 horas, ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?

Solución. Sea z la distancia entre los dos barcos y t el tiempo transcurrido en horas desde que dejaron el puerto. Entonces,

$$z^2 = (20t)^2 + (30t)^2; \Rightarrow z^2 = 1300t^2 \Rightarrow z = \sqrt{1300}t$$

$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1300} = 30{,}06$ km por hora aproximadamente.

Problema 7-2 A un cono recto circular invertido le entra agua a razón de 2 cm^3 por minuto. La altura del cono es dos veces su diámetro. ¿A qué rapidez sube la superficie del agua cuando la misma alcanza una profundidad de 10 cm en el cono? (Vea Fig. 7-1.)

Solución. Sea V el volumen del agua en el cono, h su profundidad, r el radio superior, t el tiempo en minutos. Entonces $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con $h = 4r$; por tanto,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{48}\right)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{16} = \frac{\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}$$

Al remplazar las cantidades conocidas por sus valores se tiene

$$2 = \frac{\pi}{16}10^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0{,}32}{\pi} = 0{,}102 \text{ cm por minuto}$$

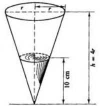


Figura 7-1

Problema 7-3 Se arroja una piedra en un estanque de agua tranquila. El radio de la onda exterior aumenta a una velocidad de 4 pies por segundo, cuando el radio es de 10 pies. ¿A qué velocidad aumenta el área del círculo de agua perturbada?

Solución. $A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 10 \cdot 4 = 80\pi = 251{,}33$ pie/s.

Problema 7-4 Una cometa está a 80 pies de altura sobre el nivel del suelo. Horizontalmente se aleja a una velocidad de 4 pies por segundo del niño que la sostiene. ¿A qué velocidad el niño está soltando la cuerda, cuando la cuerda mide 100 pies?

Solución. Sea x la distancia horizontal a la cometa, z la cuerda soltada y t el tiempo en segundos. Entonces:

$$z^2 = x^2 + 80^2 \Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Por el teorema de Pitágoras, $x = 60$ cuando $z = 100$. Al remplazar los valores conocidos se obtiene $100\frac{dz}{dt} = 60(4)$. Entonces, $\frac{dz}{dt} = 2{,}4$ pie/s.

Problema 7-5 Un punto se mueve sobre la parte superior de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que hace que su abscisa aumente 5 unidades por segundo cuando $x = 4$. ¿Con qué rapidez cambia la ordenada? (Vea Fig. 7-2.)

Solución. Derivando $y^2 = x^3$ con respecto a t se obtiene $2y\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$. Cuando $x = 4$, $y = 8$. Al remplazar estos valores se obtiene:

$$2(8)\frac{dy}{dt} = 3(4^2)\cdot 5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 15 \text{ unidades por segundo}$$

Problema 7-6 Una escalera de 3 m descansa contra un muro sobre el nivel del suelo. Si se aleja el extremo inferior de la escalera a una velocidad de 1,20 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior en el instante en que está a 2,40 m del suelo?

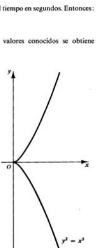


Figura 7-2

Solución. Sea y la altura sobre el suelo y x la distancia que la separa del muro. Cuando $y = 2{,}4$, $x = 1{,}80$. Además,

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Remplazando los valores conocidos se tiene que

$$2 \cdot 1{,}80 \cdot 1{,}20 + 2 \cdot 2{,}40\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0{,}90 \text{ m/s}$$

Problema 7-7 Un hombre de 1,80 m de estatura se aleja a una velocidad de 3 km por hora de una luz que está a 4,5 m sobre el nivel del piso. Cuando su distancia horizontal de la luz es de 3,6 m: *a)* ¿A qué velocidad crece su sombra? *b)* ¿A qué velocidad se mueve la parte más alejada de la sombra con respecto a la luz? (Vea Fig. 7-3.)

Solución. *a)* Sea x la distancia horizontal que separa al hombre de la luz y y la longitud de su sombra. Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{x + y}{4{,}5} = \frac{y}{1{,}8} \Leftrightarrow 1{,}8x = 2{,}7y \Rightarrow 1{,}8\frac{dx}{dt} = 2{,}7\frac{dy}{dt}$$

Remplazando los valores,

$$1{,}8(3) = 2{,}7\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2 \text{ km/h}$$

b) Necesitamos saber con qué rapidez cambia $x + y$,

$$\frac{d}{dt}(x + y) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3 + 2 = 5 \text{ km/h}$$

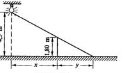


Figura 7-3

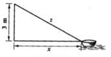


Figura 7-4

Problema 7-8 Un hombre está parado en un muelle y hala un bote por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 m por encima del amarre del bote. El bote está 3,6 m del muelle. Si el hombre hala la cuerda a una velocidad de 90 cm/s, ¿a qué velocidad se aproxima el bote al muelle? (Vea Fig. 7-4.)

Solución. Sea x la distancia del bote al muelle y z la longitud de la cuerda. Cuando $x = 3{,}6$, $z = 4{,}7$. Entonces:

$$\frac{dz}{dt} = -0{,}90 \text{ y } x^2 + 9 = z^2 \text{ y } 2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

Remplazando los valores conocidos se tiene

$$3{,}60\frac{dx}{dt} = 4{,}7(-0{,}90) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1{,}17 \text{ m/s}$$

Problema 7-9 En una fábrica de cemento se deposita arena de tal manera que forma una pila cónica cuya altura siempre es igual a los 4/3 del radio de la base. *a*) ¿Con qué rapidez aumenta el volumen cuando el radio de la base es de 90 cm y el cual aumenta a su vez a una velocidad de 1/8 cm por minuto? *b*) ¿Con qué rapidez aumenta el radio cuando tiene 1,80 m y su volumen aumenta a una razón de 3 m^3 por minuto?

Solución. *a*) Sea r = radio de la base y h = altura de la pila en el tiempo t.

Como $h = 4/3,\ r,\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{9}\pi r^3$ y $\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Cuando $r = 90$ y $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 1350\pi \text{ cm}^3/\text{min}$.

b) Cuando $r = 1{,}80$ y $\frac{dv}{dt} = 3 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{3\frac{dv}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{3 \cdot 3}{4\pi \cdot 3{,}24} = \frac{1}{1{,}44\pi}$ m/min.

Problema 7-10 En un tiempo t_0 la longitud del lado de un cuadrado es de 8 cm y cada lado del cuadrado aumenta en longitud a razón de 0,2 cm por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del área del cuadrado con respecto al tiempo y con respecto a la longitud del lado en el tiempo t_0?

Solución. Sea $x(t)$ = longitud de un lado en el tiempo t; $A(t)$ = área del cuadrado en el tiempo t. Sea $x(t_0) = 8$ cm; $\dot{x}(t_0) = 0{,}2$ cm/min; $A(t) = x^2(t)$; $A'(t) = 2x(t)\dot{x}(t)$. Entonces la razón de cambio del área con respecto a la longitud de un lado en el tiempo t_0 es $\dot{A}(t_0) = 2x(t_0)\dot{x}(t_0) = (2)(8)(0{,}2) = 3{,}2 \text{ cm}^2/\text{min}$. La razón de cambio del área con respecto a la longitud de un lado en el tiempo t_0 es $[D_x A]_{x=8} = 2 \cdot (8) = 16$ cm.

Problema 7-11 Determine la razón de cambio de la energía cinética de una partícula con respecto a su velocidad. Muestre que la razón de cambio de la energía cinética con respecto al tiempo es la fuerza que actúa sobre la partícula por la velocidad.

Solución. Sea m = masa de la partícula; $v(t)$ = velocidad de la partícula en el tiempo t_0; $E(t)$ = energía cinética de la partícula en el tiempo t.

La energía cinética de la partícula está dada por $E = 1/2\ mv^2$. Por tanto, $D_v E = D_v(1/2\ mv^2) = mv$ y $D_t E = \dot{E} = mv\dot{v} = mva$, con $a(t) = \dot{v}(t)$, que es la aceleración de la partícula en el tiempo t. La segunda ley de Newton dice que $F = ma$; entonces

$$D_t E = \dot{E} = Fv$$

Problema 7-12 Halle el error aproximado en el volumen de una esfera de radio r cm, debido a una disminución en el radio del 1 por 100. ¿Cuál es el error relativo o porcentaje?

Solución. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $dV(r) = V'(r)\Delta x = 4\pi r^2 \Delta x$. Se da $\frac{\Delta x}{r} = 0{,}01$. El error es $\Delta V(r)$. $\Delta V(r) \approx$ $\approx dV(r) = 4\pi r^2 \Delta x \,|_{\Delta x = 0{,}01r} = 0{,}04\pi r^3 \text{ cm}^3$.

El error relativo o porcentaje es $\frac{\Delta V(r)}{V(r)} \approx \frac{dV(r)}{V(r)} = \frac{0{,}04\pi r^3}{4/3\pi r^3} = 0{,}03 = 3\ \%$.

Problema 7-13 Empezando en el origen, un punto P se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ de manera que su coordenada x aumenta 3 unidades por segundo. Sea Q el punto que determina sobre el eje X la recta que pasa por $(0, -4)$ y P. *a*) Halle la velocidad de Q

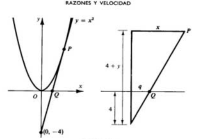


Figura 7-5

cuando P está en $(1, 1)$. *b*) Halle la velocidad de Q cuando P está en $(3, 9)$. *c*) Explique geométricamente cuándo la velocidad de Q es positiva y cuándo es negativa.

Solución. Sea $P = (x(t), y(t))$ y $Q = (q(t), 0)$. Primero exprese $q(t)$ en términos de $x(t)$. Esto se puede hacer escribiendo la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y P y hallando su intercepción con el eje X. Otra forma es empleando triángulos semejantes:

$$\frac{9}{4} = \frac{x}{4+y} \Rightarrow q = \frac{4x}{4+y} \text{ y como } y = x^2 \Rightarrow q = \frac{4x}{4+x^2}$$

Como q y x dependen de t se escribe $q(t) = \dfrac{4x(t)}{4+x^2}$. Derivando obtenemos $q'(t) = \dfrac{4(4-[x(t)]^2)}{(4+[x(t)]^2)^2} \cdot x'(t)$. Como $x'(t) = 3$, para todo t, $q'(t) = \dfrac{12(4-[x(t)]^2)}{(4+[x(t)]^2)^2}$.

a) Cuando P está en $(1, 1)$, $x(t) = 1 \Rightarrow q'(t) = 36/25$. La velocidad es de 36/25 unidades por segundo.

b) Cuando P está en $(3, 9)$, $x(t) = 3 \Rightarrow q'(t) = -60/169$ unidades por segundo.

c) De la fórmula de $q'(t)$, la velocidad es positiva si $0 \le x < 2$ y negativa si $x > 2$. El punto Q se mueve a la derecha hasta que PQ es tangente a la curva. De ahí en adelante Q se mueve hacia la izquierda.

Problema 7-14 Un balón esférico pierde aire a razón constante de 2 cm³/s. ¿Con qué rapidez decrece el radio del balón cuando su diámetro es de 1 m?

Solución. Sea R el radio y V el volumen del balón; entonces $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Derivando con respecto a t se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{dV}{dt} = -\frac{2}{4\pi R^2} \text{ cm}^3/\text{s}$$

puesto que $\dfrac{dV}{dt} = -2$ cm³/s por hipótesis. Cuando el diámetro del balón es de 1 m, su radio es de 50 cm. En este momento,

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{4\pi R^2} = -\frac{1}{5000\pi} \approx 0{,}00006 \text{ cm/s}$$

es decir, R disminuye a una velocidad aproximada de 0,00006 cm/s.

Problema 7-15 Un peatón, andando en línea recta a la velocidad de v m/s, iluminado por un haz de luz horizontal producida por un foco situado en el infinito, proyecta su sombra sobre un muro circular de radio R. Halle la expresión de la velocidad de dicha sombra en el

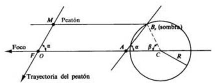


Figura 7-6

muro, en función del ángulo α que forma la sombra con la dirección del movimiento del peatón y del tiempo transcurrido desde el instante en que esté alineado con el foco y el muro.

Solución. Sea $OM = vt$, por el teorema del seno: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{R} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{vt}$, y $AB = \beta R$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{vt\operatorname{sen}\alpha}{R}$, luego $\beta = \operatorname{arc\,sen}\frac{vt\operatorname{sen}\alpha}{R}$. Entonces $\widehat{AB} = R\operatorname{arc\,sen}\frac{vt\operatorname{sen}\alpha}{R}$.

$$v_s = \frac{d\widehat{AB}}{dt} = R\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2t^2\operatorname{sen}^2\alpha}{R}}}\cdot\frac{v}{R}\operatorname{sen}\alpha = \frac{Rv\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{R^2 - v^2t^2\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Problema 7-16 Un móvil describe una trayectoria elíptica de semiejes a y b con velocidad tangencial constante v m/s. Un foco luminoso situado en el centro de la curva le sigue. Determine la velocidad angular del foco luminoso para que el vehículo esté constantemente iluminado.

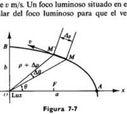


Figura 7-7

Solución. La ecuación de la elipse en coordenadas polares se obtiene mediante el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\operatorname{sen}\theta \\ \frac{x^2}{a^2} &+ \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho = \frac{1}{ab}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

La velocidad angular del foco es $\frac{d\theta}{dt}$; derivando la expresión anterior con respecto a t se obtiene

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{ab}\cdot\frac{(a^2-b^2)\operatorname{sen}2\theta}{2\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad v del móvil es $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{ab}\left[\cos\theta\frac{c^2\operatorname{sen}2\theta}{2\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}} - \operatorname{sen}\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\right]\frac{d\theta}{dt}$$

Análogamente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{ab} \cdot \frac{d\theta}{dt}\left[\operatorname{sen}\theta \frac{c^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}} + \cos\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\right]$$

$$v^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left[\frac{c^4\operatorname{sen}^2 2\theta + 4(b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta)^2}{4(b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2vab\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{\sqrt{c^4\operatorname{sen}^2 2\theta + 4(b^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

Problema 7-17 Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 cm/s, mientras que los otros dos lados se acortan de tal manera que la figura permanece como rectángulo de área constante A de 50 cm^2. *a)* ¿Cuál es la velocidad de cambio del perímetro P cuando la longitud del lado que aumenta es de 5 cm? *b)* ¿De 10 cm? *c)* ¿Cuáles son las dimensiones cuando el perímetro deja de crecer?

Solución. Sea x = la longitud de los lados que se alargan y y = la longitud de los que se acortan $P = 2(x + y)$ y $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$; $A = xy = 50$ y $x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$.

a) Cuando $x = 5$, $y = 10$ y $\frac{dx}{dt} = 2$, entonces,

$$5\frac{dy}{dt} + 10(2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -4 \text{ y } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4 \text{ cm/s (decrece).}$$

b) Cuando $x = 10$, $y = 5$ y $\frac{dx}{dt} = 2$, entonces,

$$10\frac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -1 \text{ y } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2 \text{ cm/s (crece).}$$

c) El perímetro deja de crecer cuando $\frac{dP}{dt} = 0$, es decir, cuando $\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -2$. Entonces

$x(-2) + y(2) = 0$ y el rectángulo es un cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}$ cm.

Problema 7-18 Un peso P cuelga de una polea, como lo muestra la Figura 7-8, a una altura de 20 cm sobre la superficie del suelo. El otro extremo es tirado por un montacargas y está a una altura de 9 cm del suelo. Si el montacargas se aleja a una velocidad de 9 cm/s, ¿a qué velocidad sube el peso cuando está a una altura de 6 cm del suelo?

Solución. La Figura 7-8 muestra las distintas longitudes.

Se debe hallar $\frac{dx}{dt}$ cuando $\frac{dy}{dt} = 9$ y $x = 6$.

Como $y^2 = (30 + x)^2 - 18^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{30 + x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Cuando $x = 6$, $y = 18\sqrt{3}$ y $\frac{dy}{dt} = 9 \Rightarrow 9 = \frac{30 + 6}{18\sqrt{3}} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm/s.

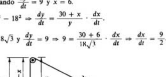


Figura 7-8

Problema 7-19 Se tiene un reloj de arena de 3 cm de radio y 6 cm de altura. Se pasa la arena a un solo lado y se voltea para que la arena comience a fluir a razón de 2 cm^3/s. Suponga que la arena en la parte inferior forma un tronco de cono. ¿Cuál es la velocidad de aumento de h para una altura dada?

Solución. Sea r el radio del cono que indica la Figura 7-9.

Por la regla en cadena tenemos que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Como se conoce $\frac{dV}{dt} = 2$ cm^3/s, lo que se necesita para obtener la solución es $\frac{dV}{dh}$. Para esto es necesario hallar una función que relacione V y h, y ésta se obtiene de la fórmula que da el volumen de los dos conos truncados como diferencia del volumen de dos conos:

$$V = \frac{1}{3}\pi(3^2)6 - \frac{1}{3}\pi r^2(6-h)$$

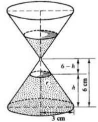


Figura 7-9

V está relacionada con r y h; por tanto, se requiere otra relación que dé el volumen únicamente en función de h. Por semejanza de triángulos se obtiene

$$r = \frac{3}{6}(6-h) \Leftrightarrow r = \frac{6-h}{2}$$

Por tanto, el volumen está dado por $V = 18\pi - \frac{1}{3}\pi\frac{(6-h)^2}{4}(6-h) = 18\pi - \frac{1}{12}\pi(6-h)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dh} = 0 - \frac{1}{12}\pi[3(6-h)^2(-1)] = \frac{1}{4}\pi(6-h)^2, \qquad \therefore \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi(6-h)^2\frac{dh}{dt}.$$

Remplazando los datos se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{\pi(6-h)^2} \text{ cm/s}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Razones y velocidades

1. La ley del movimiento de un punto sobre el eje X es $x = 3t - t^3$. Halle la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ (x se da en centímetros; t, en segundos).

   Resp.: 3 cm/s; 0; −9 cm/s

2. Por el eje X se tienen dos puntos que tienen, respectivamente, las leyes de movimiento $x = 100 + 5t$ y $x = \frac{1}{2}t^2$ donde $t \geq 0$. ¿Con qué velocidad se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro? (x se da en centímetros; t, en segundos).

   Resp.: 15 cm/s

3. Un hombre camina a $7\,^1/_2$ km/h hacia la base de una torre que tiene 18 m de altura. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia de la base es 24 m?

   Resp.: Se acerca a 6 km/h

4. Un punto se mueve sobre la parábola $y^2 = 12x$, de manera que la abscisa aumenta uniformemente 2 cm/s. ¿En qué punto aumentan la abscisa y la ordenada a la misma razón?

   Resp.: (3, 6)

5. Halle los valores de x para los que la rapidez de variación de la función $x^3 - 12x^2 + 45x - 13$ es cero.

   Resp.: 3 y 5

6. Uno de los extremos de una escalera de 15 m se apoya contra una pared vertical levantada en un piso horizontal. Suponga que se empuje el pie de la escalera alejándola de la pared a razón de 0,9 m/min: *a*) ¿Con qué velocidad baja la extremidad superior de la escalera cuando su pie dista 4 m de la pared? *b*) ¿Cuándo se moverán con la misma velocidad las dos extremidades de la escalera? *c*) ¿Cuándo baja la extremidad superior de la escalera a razón de 1,2 m/s?

Nota. Recuerde que si la distancia aumenta con el tiempo, la velocidad es positiva, y negativa si la distancia disminuye con el tiempo.

Resp.: *a*) 0,25 m/min; *b*) cuando el pie de la escalera dista $7{,}5\sqrt{2}$ m de la pared; *c*) cuando el pie dista 12 m de la pared.

7. Un buque navegaba hacia el Sur a una velocidad de 6 millas por hora; otro navegaba hacia el Este a una velocidad de 8 millas por hora. A las cuatro de la tarde el segundo cruzó la ruta del primero en el punto por el que éste había pasado dos horas antes. *a*) ¿Cómo variaba la distancia entre los buques a las tres de la tarde? *b*) ¿Cómo a las cinco de la tarde? *c*) ¿Cuándo no variaba la distancia entre ellos?

Resp.: *a*) Disminuía 2,8 millas por hora; *b*) aumentaba 8,73 millas por hora; *c*) a las 3 h 17 min de la tarde.

8. Las aristas de un tetraedro regular miden 10 cm; si aumentan 0,1 cm por minuto, calcule la rapidez de aumento del volumen.

9. Si en un cierto instante las dimensiones de un rectángulo son a y b, y su rapidez de variación es m y n, respectivamente, demuestre que la rapidez de variación del área es $an + bm$.

10. El diámetro y la altura de un cilindro circular recto son, en un cierto instante, 10 y 20 cm, respectivamente. Si el diámetro aumenta a razón de 1 cm por minuto, ¿qué alteración de la altura mantendrá el volumen constante?

Resp.: Una disminución de 4 cm/min

11. El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 3 cm por hora y la altura disminuye a razón de 4 cm por hora. Calcule cómo varía el área total del cono cuando el radio mide 7 cm y la altura 24 cm.

Resp.: Aumenta 96π cm²/h

12. En cada uno de los extremos de un cilindro de radio r y altura h se coloca un hemisferio de radio r. Si r aumenta a razón de 50 cm por minuto, ¿a qué razón debe h disminuir para mantener fijo el volumen del sólido en el instante en que $r = 10$ m y $h = 20$ m?

13. Desde la boca de un pozo profundo se deja caer una piedra, y después de t segundos se deja caer otra piedra. Demuestre que la distancia entre las piedras aumenta a razón de gt cm por segundo.

14. Un gasómetro contiene 1000 m³ de gas a la presión de 300 gf por cm². Si la presión disminuye a razón de 3 gf por cm² por hora, ¿con que rapidez aumentará el volumen? (Dése por sentada la ley de Boyle: $pv = c$.)

Resp.: 10 m³/h

15. La ley adiabática para la expansión del aire es $PV^{1,4} = c$. Si en un tiempo dado se observa que el volumen es de 10 m³ y la presión es de 50 kgf por centímetro cuadrado, ¿cuál es la alteración de la presión si el volumen disminuye un metro cúbico por segundo?

Resp.: Aumenta 7 kgf/cm² por segundo

16. Se echa agua en un recipiente hemisférico de 35 cm de diámetro a razón de 16 cm³ por segundo. ¿Con qué rapidez sube el agua: *a*) cuando ha llegado a media profundidad; *b*) en el momento de rebosar? (El volumen de un segmento esférico de una base es $\pi rh^2 - 1/3\pi h^3$, siendo h la altura del segmento.)

17. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 1000 cm³ por minuto. En el instante en que el radio es 25 cm: *a*) ¿con qué rapidez disminuye el radio?; *b*) ¿con qué rapidez disminuye el área de la superficie.

Resp.: *b*) 80 cm²/min

18. Una vía de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de 60°. Una locomotora dista 160 m del cruce y se aleja de él a la velocidad de 100 km por hora. Un automóvil dista del cruce 160 m y se acerca a él a la velocidad de 50 km por hora. ¿A qué razón se altera la distancia entre los dos?

Resp.: Aumenta 25 km/h o $25\sqrt{3}$ km/h

19. La longitud de una artesa horizontal es de 2,5 m; su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles. Si se echa agua en la artesa a razón de $1/8\ m^3$ por minuto, ¿con qué rapidez sube la superficie del agua cuando el agua tiene 1/2 m de profundidad? *Resp.:* 5 cm/min

20. En el ejercicio anterior, ¿con qué rapidez debe echarse el agua para que el nivel suba 4 cm por minuto cuando el agua tiene una profundidad de 75 cm?

21. La longitud de una artesa horizontal es de 4 m; su sección transversal es un trapecio; el fondo tiene un metro de ancho; el seno del ángulo entre sus caras laterales y el plano horizontal es 4/5. Se echa agua en la artesa a razón de $1/4\ m^3$ por minuto. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando el agua tiene 60 cm de profundidad?

22. El segmento que la tangente a la rama positiva de la hipérbola $xy = 4$ determina sobre el eje de las x aumenta 3 unidades por segundo. Sea OB la ordenada al origen. Halle la velocidad de B después de 5 segundos del instante en que la tangente pasaba por el origen.

Resp.: $-\dfrac{16}{75}$ de unidad por segundo

23. Un punto P se mueve a lo largo de la parábola $y^2 = x$ de forma que su abscisa aumenta de una manera uniforme k unidades por segundo. La proyección de P sobre el eje de las x es M. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo OMP cuando P está en el punto de abscisa $x = a$?

Resp.: $\dfrac{3}{4}k\sqrt{a}$ unidades por segundo

24. Un coche de carreras viaja a una velocidad constante de 90 millas por hora sobre una pista circular. Suponga que hay una fuente de luz en el centro de la pista y una valla tangente a la pista en un punto P. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra del coche sobre la valla cuando el coche ha recorrido 1/8 de la pista desde P? *Resp.:* 180 millas por hora

25. La Figura 7-10 muestra el mecanismo de una máquina. Suponga que el volante de radio R gira con velocidad angular constante ω en el sentido de las agujas del reloj. ¿Con qué rapidez se mueve el pistón cuando el volante ha girado un ángulo α?

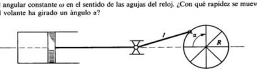


Figura 7-10

Resp.: $R\omega\left(\operatorname{sen}\alpha + \dfrac{R\operatorname{sen}2\alpha}{2\sqrt{l^2 - R^2\operatorname{sen}^2\alpha}}\right)$

26. Una línea recta paralela al eje de las y se mueve de la posición $x = -1$ a la posición $x = 1$ a una razón constante v, intersectando el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y dividiéndolo en un área a la izquierda S y un área a la derecha $\pi - S$. ¿Con qué rapidez crece S cuando la recta está en la posición $x = 1/2$?

Resp.: $\sqrt{3}\,v$

27. Una viga de longitud l con su extremo superior atado a una polea se apoya en una pared y su extremo inferior descansa sobre un carro (vea Fig. 7-11). ¿Cuál es la aceleración del carro cuando está a x unidades de la pared (parte inferior) si se suelta la soga a razón de v unidades por segundo?

Nota. Recuerde que aceleración es $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, siendo v = velocidad, x = distancia y t = tiempo.

28. La ley del movimiento de un punto material, lanzado en el plano vertical xOy, formando un ángulo α respecto al horizonte, con una velocidad inicial V_0, viene dado por las fórmulas siguientes (sin tomar en consideración la resistencia del aire):

$$x = V_0 t\cos\alpha,\quad y = V_0 t\operatorname{sen}\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

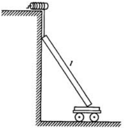


Figura 7-11

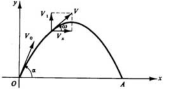


Figura 7-12

donde t es el tiempo y g la aceleración de la fuerza de gravedad. Halle la trayectoria del movimiento y su alcance. Determine también la magnitud de la velocidad del movimiento y su dirección. (Vea Fig. 7-12.)

Resp.: La ecuación de la trayectoria es $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$. El alcance es igual a $\frac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$. La velocidad (su magnitud), $\sqrt{V_0^2 - 2V_0 gt \operatorname{sen} \alpha + g^2t^2}$; el coeficiente angular (pendiente) del vector velocidad, $\frac{V_0 \operatorname{sen} \alpha - gt}{V_0 \cos \alpha}$.

Indicación. Para determinar la trayectoria hay que eliminar el parámetro t del sistema dado. El alcance es la abscisa del punto A. Las proyecciones de la velocidad sobre los ejes, $V_x = \frac{dx}{dt}$ y $V_y = \frac{dy}{dt}$. La magnitud de la velocidad, $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; el vector de la velocidad está dirigido por la tangente a la trayectoria.

CAPITULO 8

Funciones crecientes y decrecientes. Preservación del orden

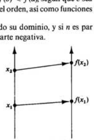
Si examinamos la función $f(x) = cx$ y $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$ o $f(b) < f(a)$, según que c sea positivo o negativo. Esto muestra que existen funciones que preservan el orden, así como funciones que no lo preservan.

Las funciones del tipo x^n con n impar conservan el orden en todo su dominio, y si n es par conservan el orden en la parte positiva del eje X y lo invierten en la parte negativa.

Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $S \subset \mathscr{D}_f$, se dice que:

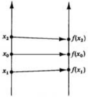
a) f conserva el orden (respectivamente, invierte el orden) sobre $S \Leftrightarrow$ para todas las parejas $|x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ [respectivamente, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$].

b) f conserva el orden localmente (respectivamente, invierte el orden) en $x_0 \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow$ existe un $\delta_f = \delta_f(x_0)$ tal que para $x_1, x_2 \in]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[\cap \mathscr{D}_f$, $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ [respectivamente, $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_0) < f(x_1)$].



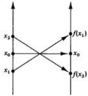
f conserva el orden

Figura 8-1



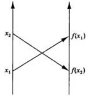
f conserva localmente el orden en x_0

Figura 8-2



f invierte localmente el orden en x_0

Figura 8-3



f invierte el orden sobre *S*

Figura 8-4

En coordenadas cartesianas la preservación e inversión del orden equivale a que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sea positivo o negativo. Es decir, que el signo de la derivada indica cuándo la función conserva o invierte el orden.

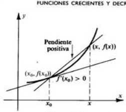


Figura 8-5

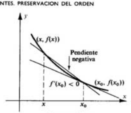


Figura 8-6

Teorema. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convergente en x_0. Entonces *a*) $\lim_{x \to x_0} f > 0$ [respectivamente, < 0] $\Rightarrow$ existe un $\delta_f = \delta_f(x_0)$ tal que para $x \neq x_0$, $x \in]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[\cap \mathscr{D}_f \Rightarrow f(x) > 0$ [respectivamente, < 0]. *b*) $f(x) > 0$ [respectivamente, < 0] sobre $\mathscr{D}_f \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f \geq 0$ [respectivamente, ≤ 0].

Demostración. *a*) Sea $L = \lim_{x \to x_0} f$. Se va a demostrar el teorema para el caso $L > 0$, porque para el caso $L < 0$ es la misma demostración que para $-f$. La clave de la demostración es

$$\frac{L}{2} > 0 \Leftrightarrow L > 0$$

Según la Figura 8-7, si $L > 0$ se puede aceptar $L/2$ como el error prescrito para $f(x) - L$, y obtener $\delta_f = \delta_f(L/2, x_0)$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - L| < L/2 \tag{8-1}$$

Como $|a - b| < c \Leftrightarrow b - c < a < b + c$, (8-1) se transforma en

$$x_0 - \delta_f < x < x_0 + \delta_f \text{ y } x \neq x_0 \Rightarrow L - L/2 < f(x) < L/2 + L \tag{8-2}$$

de donde se deduce la relación

$$x_0 - \delta_f < x < x_0 + \delta_f \text{ y } x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > L/2 \tag{8-3}$$

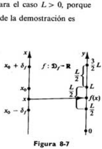


Figura 8-7

Lo que completa la demostración de *a*). La idea geométrica de la demostración la da la Figura 8-7. El hecho de que el límite L esté a una distancia positiva de 0 hace que los valores funcionales $f(x)$ estén a una distancia menor que $L/2$ con respecto a 0.

b) Esta conclusión es consecuencia de *a*) simplemente negándola. Es decir, si se niega que $L > 0$, entonces $L < 0$; por tanto, $f(x) < 0$ en algún entorno de x_0, lo cual contradice la hipótesis $f(x) > 0$ sobre $\mathscr{D}_f$.

Teorema del incremento local

Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y derivable en $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Entonces $f'(x_0) > 0$ (respectivamente, < 0) $\Rightarrow f$ conserva el orden localmente (respectivamente, invierte el orden) en x_0.

Demostración. Se va a demostrar solamente el caso $f'(x_0) > 0$, puesto que el caso $f'(x_0) < 0$ es consecuencia de estudiar a $-f$. La clave de la demostración es el hecho de que los aproximantes de $f'(x_0)$, es decir, los cocientes $[(f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$, debe finalmente hacerse positivo si el límite $f'(x_0)$ es positivo.

$$Q = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En particular se tiene que $\delta_Q = \delta_Q(x_0)$, tal que sobre $\mathscr{D}_f$, se tiene

$$0 < |x - x_0| < \delta_Q \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \tag{8-4}$$

Pero

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 < 0 \text{ y } f(x) - f(x_0) < 0 \\ \text{o} \\ x - x_0 > 0 \text{ y } f(x) - f(x_0) > 0 \end{cases} \tag{8-5}$$

Para x_1 y $x_2 \in]x_0 - \delta_Q, x_0 + \delta_Q[$ se tiene de (8-4) y (8-5) que

$$x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) \text{ y } f(x_0) < f(x_2) \tag{8-6}$$

Según (8-6) y la parte *b*) de la definición, queda demostrado el teorema. Las Figuras 8-8, 8-9 y 8-10 dan una idea geométrica de la demostración.

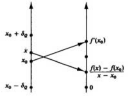


Figura 8-8

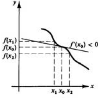


Figura 8-9

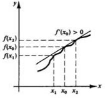


Figura 8-10

EXTREMOS DE LAS FUNCIONES. MAXIMOS Y MINIMOS

El concepto de derivada es el instrumento fundamental para minimizar o maximizar un fenómeno físico, es decir, para obtener un resultado óptimo de un conjunto de posibilidades.

Si se hace rebotar una bola de caucho, observamos que en el primer rebote alcanza su altura máxima y ésta disminuye en el segundo y así sucesivamente hasta detenerse. Los distintos máximos así obtenidos se suelen llamar «máximos locales». Si en el conjunto de máximos locales existe uno que sea mayor que todos los demás, llamamos a este máximo «máximo global». Cosa análoga podemos decir para los mínimos. En términos del grafo cartesiano, el máximo global es la proyección del punto más alto del grafo sobre el eje de las *y*. Análogo para los mínimos. (Vea Fig. 8-11.)

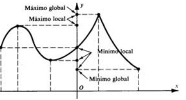


Figura 8-11

Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Decimos que:

a) $f(x_0)$ es el máximo global de f (respectivamente, mínimo) sobre $\mathscr{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathscr{D}_f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ [respectivamente, $\geq f(x_0)$].

b) $f(x_0)$ es el máximo local (respectivamente, mínimo) de $f \Leftrightarrow$ existe un $\delta_f = \delta_f(x_0)$ tal que $f(x_0)$ es el máximo global (respectivamente, mínimo) de la restricción de f a $]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[$, según *a*).

Por lo común, para calcular los máximos o mínimos se hace la derivada igual a cero y se resuelve la ecuación resultante. Las funciones $|x|$ y $|\text{sen } x|$ muestran que los extremos se pueden presentar en puntos interiores en los cuales la función no es derivable o también en los puntos extremos.

Teorema. Del extremo estacionario. Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$. Entonces $x_0 \in]a, b[$ y f es derivable en x_0 y $f(x_0)$ un extremo local de $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

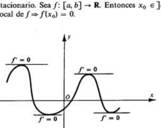


Figura 8-12

Demostración. Neguemos la conclusión. Es decir, que $f'(x_0) \neq 0$, $f(x_0)$ es un extremo local y x_0 un punto de derivabilidad en el interior de $]a, b[$. Entonces $f'(x_0) > 0$ o $f'(x_0) < 0$.

En cualquier caso, el teorema del incremento local se aplica. En el primer caso el teorema afirma que existe un entorno de x_0, digamos $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que para todas las parejas x_1, x_2, entonces $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ cuando $x_1 < x_0 < x_2$. Esto niega la hipótesis de que $f(x_0)$ es un extremo local, porque $f(x_0)$ ni domina ni es dominado por valores funcionales de todos los puntos de un entorno de x_0. Lo mismo para el segundo caso.

Este teorema no es suficiente para hallar los extremos de una función; situación que se resuelve al estudiar el signo de la segunda derivada.

Definición. Por punto crítico se entiende un punto estacionario, es decir, de derivada cero, un punto donde no existe la derivada o un punto extremo del dominio.

El siguiente teorema asegura la existencia de valores máximos y mínimos según determinadas condiciones. Esto garantiza que no se trabaja en el vacío.

Teorema. Sea f una función continua sobre $[a, b]$. Entonces f tiene un máximo y un mínimo sobre $[a, b]$. (No se da demostración.)

Nota 1. Una función definida en un intervalo cerrado puede no tener máximo, o no tener mínimo o ninguno de los dos si la función no es continua en todos los puntos del intervalo. Por ejemplo, suponga que f se define sobre $[a, b]$ por $f(x) = x$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x = 1$. Esta función tiene un mínimo en $[0, 1]$ y no tiene máximo, f no es continua en 1.

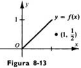


Figura 8-13

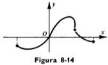


Figura 8-14

Nota 2. Una función puede ser discontinua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y, sin embargo, tener máximo y mínimo. (Vea Fig. 8-14.)

Estos ejemplos dicen que la hipótesis de que la función sea continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ es apenas una condición suficiente, pero no necesaria. Si la función no es continua o el intervalo no es cerrado puede o no existir un máximo.

Figura 8-15

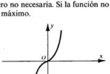


Figura 8-16

Si la función f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y si f tiene un máximo en x_0, puede suceder que: *a)* $x_0 = a$ o $x_0 = b$; *b)* $a < x_0 < b$ y $f'(x_0) = 0$, o *c)* $a < x_0 < b$ y f no es derivable en x_0. La Figura 8-15 muestra las tres posibilidades.

Nota 3. Si $f'(x_0) = 0$, entonces f no tiene necesariamente un máximo o mínimo en x_0. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$ (Fig. 8-16) $f'(0) = 0$. Sin embargo, en 0 no tiene ni máximo ni mínimo.

Resumen de las técnicas para hallar máximos o mínimos

1. Trate de expresar la cantidad que se va a maximizar o minimizar como función de alguna cantidad que se presente en el problema, como una distancia, un tiempo, un ángulo, etc.

2. Si al comienzo necesita dos variables, digamos x y y, para expresar la cantidad que se va a maximizar o minimizar, halle una segunda relación entre x y y y empléela para eliminar una de las variables.

3. Determine qué valores de la variable son admisibles en el problema. En otras palabras, halle el conjunto de valores sobre el cual se considera la función.

4. Considere los puntos donde la derivada es cero; la segunda derivada, puntos de inflexión, extremos, etc.

5. Para ver dónde existen máximos o mínimos, localice los puntos donde:

   a) la derivada es cero,
   b) la derivada no existe,
   c) el dominio de la función tiene uno o dos extremos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 8-1 Para las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; *b)* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x < 3 \\ 8 - x \text{ si } 3 \leq x \end{cases}$, *c)* $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

halle los extremos locales de f aplicando la primera derivada. Determine los valores de x en los cuales ocurren los extremos locales, también los intervalos en los cuales f es creciente y en los que es decreciente. Haga un dibujo del grafo.

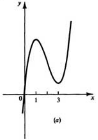
Solución. *a)* $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ f' existe para todos los valores de x.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad 3(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3$$

Así los valores críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo local en uno de estos puntos, aplicamos el criterio de la primera derivada. Los resultados se dan en la Tabla 8-1.

TABLA 8-1

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < 1$		$+$	f es creciente
$x = 1$	5	0	f tiene un máximo local
$1 < x < 3$		$-$	f es decreciente
$x = 3$	1	0	f tiene un mínimo local
$3 < x$		$+$	f es creciente



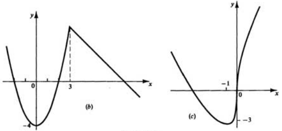


Figura 8-17

b) Si $x < 3$, $f'(x) = 2x$. Si $x > 3$, $f'(x) = -1$.

Como $f'_-(3) = 6$ y $f'_+(3) = -1$ concluimos que $f'(3)$ no existe. Por tanto, 3 es un punto crítico de f. $f' = 0$ cuando $2x = 0$ o $x = 0$. Por tanto, cero es un punto crítico de f.

Aplicando el criterio de la primera derivada, el resultado se resume en la Tabla 8-2.

TABLA 8-2

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < 0$		$-$	f es decreciente
$x = 0$	-4	0	f tiene un mínimo local
$0 < x < 3$		$+$	f es creciente
$x = 3$	5	no existe	f tiene un máximo local
$3 < x$		$-$	f es decreciente

c) $f'(x) = 4/3x^{1/3} + 4/3x^{-2/3} = 4/3x^{-2/3}(x + 1)$.

TABLA 8-3

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < -1$		$-$	f es decreciente
$x = -1$	-3	0	f tiene un mínimo local
$-1 < x < 0$		$+$	f es creciente
$x = 0$	0	no existe	f no tiene extremo local en $x = 0$
$0 < x$	$+$	$+$	f es creciente

Problema 8-2 Halle los extremos de la función $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Solución. $y' = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1)$.

Igualándola a cero obtenemos $\sqrt[3]{x} + 1 = 0$. Entonces $x = -1$ es un punto estacionario. Si $x = -1 - h$, donde h puede ser cualquier número positivo suficientemente pequeño, entonces $y' > 0$; si, por el contrario, $x = -1 + h$ se tiene $y' < 0$. Por consiguiente, $x_1 = -1$ es un punto máximo de la función, además max $f = 1$.

Igualando a cero el denominador de la función, obtenemos $\sqrt[3]{x} = 0$ es el segundo punto crítico de la función para el que no existe derivada y'. Cuando $x = -h$, evidentemente tendremos $y' < 0$; cuando $x = h$ tenemos $y' > 0$. Por consiguiente, $x_2 = 0$ es un punto mínimo de la función, además min $f = 0$ (vea Fig. 8-18).

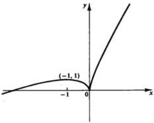


Figura 8-18

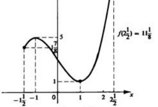


Figura 8-19

Problema 8-3 Halle los valores mínimo y máximo globales de la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el segmento $-1\frac{1}{2} \leq x \leq 2\frac{1}{2}$.

Solución. (Vea Fig. 8-19.) Como $y' = 3x^2 - 3$, los puntos críticos de la función son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Comparando los valores de la función en estos puntos con los valores de la función en los extremos del intervalo dado,

$$y(-1) = 5;\ y(1) = 1;\ y(-1\tfrac{1}{2}) = 4\tfrac{1}{8};\ y(2\tfrac{1}{2}) = 11\tfrac{1}{8},$$

llegamos a la conclusión (Fig. 8-19) de que el valor mínimo global de la función $m = 1$ se alcanza en el punto $x = 1$ (en el punto mínimo) y el máximo global $M = 11\frac{1}{8}$ en el punto $x = 2\frac{1}{2}$ (en el punto extremo derecho del segmento).

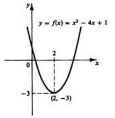


Figura 8-20

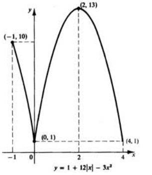


Figura 8-21

Problema 8-4 Halle el mínimo global de $f(x) = (x - a)^2 + b$ sobre $\mathbf{R}$, siendo a y b números reales. Aplique el resultado a $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Solución. Como f es derivable sobre $\mathbf{R}$ y no existen puntos extremos, los únicos puntos críticos son los puntos estacionarios, es decir, las soluciones de $f'(x) = 2(x - a) = 0$. Así, $x = a$ es el único punto crítico. $f(a) = b$ es el mínimo global, porque $x \in \mathbf{R} \Rightarrow (x - a)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - a)^2 + b \geq b$. Como $(x - a)^2 + b = b \Leftrightarrow x = a$ es evidente que el mínimo global se obtiene solamente en $x_0 = a$.

Como $x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 4x + 4) - 3 = (x - 2)^2 - 3$, la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ tiene un mínimo global igual a -3 en $x_0 = 2$.

Problema 8-5 Halle el máximo global de $f(x) = 1 + 12|x| - 3x^2$ en $[-1, 4]$.

Solución. f es derivable sobre $\mathbf{R} - \{0\}$, porque $|x|$ no es derivable en $x = 0$. Esto muestra que 0 es punto crítico. También $-1, 4$ son puntos críticos porque son puntos extremos.

Como $f'(x) = (1 + 12x - 3x^2)' = 12 - 6x$ si $x > 0$ y $f'(x) = (1 - 12x - 3x^2)' = -12 - 6x$ si $x < 0$, vemos que $x = \pm 2$. El conjunto de puntos críticos es $\{0, -1, 4, 2\}$, porque -2 está excluido del dominio. f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[-1, 4]$, el teorema del valor extremo asegura que ambos extremos globales se producen.

De $f(0) = 1$, $f(-1) = 10$, $f(4) = 1$ y $f(2) = 13$ se tiene max $f = 13$ y min $f = 1$. Observe que el máximo se produjo en un punto estacionario y el mínimo se obtuvo en un punto extremo no derivable.

Problema 8-6 *a)* Halle el máximo global de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - 1$ sobre **R**. *b)* Halle el mínimo global de $f(x) = \cos x + |x|$ sobre **R**.

Solución. *a)* Como f es derivable sobre **R** y como $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Según el teorema del extremo estacionario, el único punto crítico es 0. Si existe un máximo se debe tener que $f(0) = 0$, para esto vamos a verificar que $f(x) \le f(0)$ para todo $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x^2+1)}{x^2+1} \le 0 \Leftrightarrow -x^2 \le 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$$

b) Como $\cos x$ y $|x|$ son derivables sobre $\mathbf{R} - \{0\}$, entonces f es derivable sobre $\mathbf{R} - \{0\}$. f no es derivable en 0, porque de otra manera $|x| = (\cos x + |x|) - \cos x$ sería derivable en 0. Por tanto, 0 es un punto crítico.

Para $x > 0$, $f'(x) = (\cos x + x)' = -\operatorname{sen} x + 1$, pero para $x < 0$, $f'(x) = (\cos x - x)' = -\operatorname{sen} x - 1$; por tanto, $f' = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x + 1 = 0$ o $-\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, n entero.

Por tanto, el conjunto de puntos críticos es $\left\{0, \text{ y } \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right\}$. Como $f(0) = 1$ y $f\left(\pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left|\pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right| > 1$ esto muestra que $f(0) = 1$ es el mínimo global.

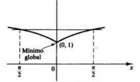


Figura 8-22

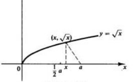


Figura 8-23

Problema 8-7 Halle la distancia mínima del punto $(a, 0)$ sobre el eje X al grafo de $y = \sqrt{x}$.

Solución. La función que se va a minimizar está dada por la fórmula

$$d(x) = \sqrt{(x-a)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + x}$$

cuyo dominio es $[0, +\infty[$. Como $d'(x) = \left(x - a + \dfrac{1}{2}\right)\left[[(x-a)^2 + x]^{-1/2}\right.$ existe para $x > 0$ y $d'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-a) + \dfrac{1}{2} = 0$ y $x > 0 \Leftrightarrow x = a - \dfrac{1}{2}$ y $x > 0$. El conjunto de puntos críticos es $\left\{0, a - \dfrac{1}{2}\right\}$, si $a > \dfrac{1}{2}$, pero $\{0\}$ si $a < \dfrac{1}{2}$. Vamos a ver que el mínimo se obtiene en $a - \dfrac{1}{2}$ si $a \ge \dfrac{1}{2}$, o en 0 si $a < \dfrac{1}{2}$.

a) $a \ge \dfrac{1}{2}$: $d(x) \ge d\left(a - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x-a)^2 + x \ge a - \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - (2a-1)x + a^2 - a + \dfrac{1}{4} \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - (2a-1)x + \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[x - \left(a - \dfrac{1}{2}\right)\right]^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.

b) $a < \dfrac{1}{2}$: $d(x) \ge d(0) \Leftrightarrow (x-a)^2 + x \ge a^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + x \ge a^2 \Leftrightarrow x(x - 2a + 1) \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \ge 2a - 1$.

Pero $x \geq 0$ y $a < \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq 2a - 1$, $\quad \therefore \; x \geq 0$ y $a < \frac{1}{2} \Rightarrow d(x) \geq d(0)$. La distancia más corta es $d\left(a - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$ si $a \geq \frac{1}{2}$, pero $d(0) = a$ si $a < \frac{1}{2}$.

Problema 8-8 Halle la longitud de la escalera, de longitud máxima, que se puede pasar por la esquina de un corredor cuyas dimensiones se indican en la Figura 8-24; se supone que la escalera se transporta paralela al suelo.

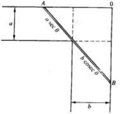


Figura 8-24

Solución. La longitud de la escalera $AB = a \sec\theta + b \operatorname{cosec}\theta$. AB es un máximo cuando:

$$\frac{d(AB)}{d\theta} = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta - b \operatorname{cosec}\theta \operatorname{cotg}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \operatorname{sen}^3\theta = b\cos^3\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \sqrt[3]{b/a}$$

Entonces $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}}$ y $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$. Por tanto, $AB = a\sec\theta + b\operatorname{cosec}\theta$ es, efectivamente, un máximo. Tenemos que mostrarlo analiticamente.

En efecto, el ángulo θ hace la longitud AB minima, es decir, que limita la longitud que puede pasar al valor de AB para $\theta = \operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{b/a}$.

Problema 8-9 Halle las dimensiones del cono recto circular, de máximo volumen, que puede ser inscrito en una esfera de radio a. (Vea Fig. 8-25.)

Solución. Sea r el radio del cono, h la altura y V su volumen: $r^2 + (h-a)^2 = a^2$; $2r + 2(h-a)\dfrac{dh}{dr} = 0 \Rightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{dh}{dr} = \dfrac{r}{a-h}$ $V = \dfrac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = \dfrac{\pi}{3}\left(r^2\dfrac{dh}{dr} + h\cdot 2r\right)\dfrac{\pi}{3}\left(r^2\dfrac{r}{a-h} + 2rh\right) = \dfrac{\pi}{3}r\dfrac{r^2 + 2ah - 2h^2}{a-h}$.

De $r^2 = a^2 - (h-a)^2$ se obtiene $\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{\pi rh(3/4a - h)}{a-h} = 0$ y $h = 0$ o $4/3a$. La altura $h = 0$ obviamente da un mínimo local; cuando $h = 4/3a$, entonces $r = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

Para verificar si $\left(r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a, h = 4/3a\right)$ es un máximo o no, es necesario considerar solamente valores de h próximos a $4/3a$ tal que $h > a$. Entonces si $r < \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a \Rightarrow h > \dfrac{4}{3}a$ y $\dfrac{dV}{dr} > 0$.

Si $r > \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow h < \dfrac{4}{3}a$ y $\dfrac{dV}{dr} < 0$, esto muestra que estas dimensiones dan el valor máximo.

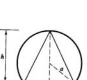


Figura 8-25

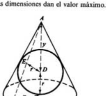


Figura 8-26

Problema 8-10 Halle la altura y el radio de la base de un cono recto circular, de volumen mínimo, que circunscribe una esfera de radio r. (Vea Fig. 8-26)

Solución. Sea x el radio de la base del cono y y la distancia del vértice del cono al centro de la esfera. Entonces $y + r$ es la altura del cono. La Figura 8-26 muestra que los triángulos ABC y ADE son semejantes; por tanto,

$$\frac{x}{r} = \frac{y+r}{\sqrt{y^2 - r^2}} \Rightarrow x = \frac{r(y+r)}{\sqrt{y^2 - r^2}}$$

Ahora $V = \frac{1}{3}\pi r^2(y+r) = \frac{\pi r^2(y+r)^2(y+r)}{3(y^2-r^2)} = \frac{\pi r^2(y+r)^2}{3(y-r)}$, $y \in]r, \infty[$.

Solamente los puntos estacionarios de $V(y)$ son puntos críticos. Puesto que

$$V'(y) = \frac{\pi r^2(y+r)(y-3r)}{3(y-r)^2} = 0 \Leftrightarrow y = -r \text{ o } y = 3r$$

El único punto crítico en $]r, \infty[$ es $y_0 = 3r$. Luego $y_0 + r = 4r$. El radio mínimo está dado por

$$x_0 = r(4r)/\sqrt{9r^2 - r^2} = r\sqrt{2}, \text{ puesto que } \frac{dV}{dy} < 0 \text{ si } y + r < 4r \text{ y } \frac{dV}{dy} > 0 \text{ si } y + r > 4r.$$

Problema 8-11 Halle la relación que existe entre la altura y el radio de la base de un cilindro recto circular de volumen dado V para que su superficie sea mínima.

Solución. Sea r el radio de la base y h la altura. Entonces el volumen está dado por $V = \pi r^2 h$; por tanto, $h = V/\pi r^2$.

Para cualquier r la superficie $S(r)$ está dada por

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \; r \in]0, +\infty[$$

Los únicos puntos críticos son los ceros de S' como

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2V = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 = 2V$$

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ es el radio mínimo. Si h_0 y r_0 son la altura y radio mínimos y como $V = \pi r^2 h = \pi r^3\left(\frac{h}{r}\right)$, entonces $\frac{h_0}{r_0} = \frac{V}{\pi r_0^3} = \frac{V}{\frac{1}{2}V} = 2$. Esto muestra que h debe ser el doble del radio. (Vea Fig. 8-27.)

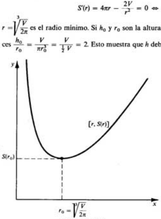


Figura 8-27

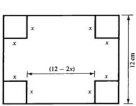


Figura 8-28

Problema 8-12 Se quiere construir una caja de una hoja de papel de 12 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados. Halle la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen sea máximo. (Vea Fig. 8-28.)

Solución. Sea x el número de centímetros del lado del cuadrado que se debe cortar. V el volumen de la caja. Las dimensiones de la caja son x, $(12-2x)$ y $(12-2x)$. $V(x) = x(12-2x)(12-2x)$. Si $x = 0$, $V = 0$, y si $x = 6$, $V = 0$. Esto muestra que el valor de x debe estar comprendido en $[0,6]$.

$V(x) = x(12-2x)(12-2x) = 144x - 48x^2 + 4x^3 \Rightarrow V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 = 12(x-2)(x-6)$
$V'(x)$ existe para todos los valores de x, haciendo $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, o $x = 6$.

Como $V(0) = 0$, $V(6) = 0$ y $V(2) = 128$, entonces el máximo global es 128, que se obtiene cuando la longitud del cuadrado que se corta es de 2 cm.

Problema 8-13 Una isla A está a 6 km de una playa B recta y en C hay una tienda a 7 km de B. Si un hombre rema a 4 km/h y camina a 5 km/h, ¿en qué punto debe desembarcar para emplear el tiempo mínimo para ir de A a C? (Vea Fig. 8-29.)

Solución. Sea x la distancia entre B y P. T el tiempo que emplea en ir de A a C. $T = \frac{|\overline{AP}|}{4} + \frac{|\overline{PC}|}{5}$, $|\overline{AP}| = \sqrt{x^2+36}$, $|\overline{PC}| = 7 - x$, $T(x) = \frac{\sqrt{x^2+36}}{4} + \frac{7-x}{5}$. Como P es un punto cualquiera en $[0,7]$, x debe estar comprendido en este intervalo.

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5}, \quad \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{x^2+36} \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm 8$$

Haciendo $T'(x) = 0$, se encuentra que $x = \pm 8$. Como -8 es una raíz extraña y $8 \in [0,7]$, no existen puntos críticos de T en $[0,7]$. Por tanto, el mínimo global de T en $[0,7]$ debe presentarse en un punto extremo del intervalo. $T(0) = \frac{29}{10}$ y $T(7) = \frac{\sqrt{85}}{4}$ como $\frac{\sqrt{85}}{4} < \frac{29}{10}$, entonces el mínimo global de T es $\frac{\sqrt{85}}{4}$ en $[0,7]$.

Es decir, el hombre debe remar en línea recta de A a C.

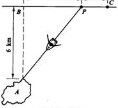


Figura 8-29

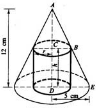


Figura 8-30

Problema 8-14 Halle las dimensiones del cilindro recto circular, de máximo volumen, que puede ser inscrito en un cono circular de radio $r = 5$ cm y altura 12 cm. (Vea Fig. 8-30.)

Solución. Si $r = 0$ y $h = 12 \Rightarrow V = 0$; si $r = 5$ y $h = 0 \Rightarrow V = 0$. Esto muestra que r está comprendido en el intervalo $[0,5]$ y h en $[0,12[$.

$V = \pi r^2 h$ y $\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5}$, semejanza de los triángulos ABC y ADE. Por tanto, el volumen se expresa como $V(r) = \frac{12\pi}{5}(5r^2 - r^3)$; V es continua en $[0, 5]$; $V'(r) = \frac{12\pi}{5}(10r - 3r^2)$.

Haciendo $V'(r) = 0$, se tiene $r(10 - 3r) = 0 \Rightarrow r = 0$ y $r = \frac{10}{3}$.

Como V' existe para todos los valores de r, los únicos puntos críticos de V son 0 y 10/3.

Ahora,
$$V(0) = 0,\ V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400\pi}{9},\ V(5) = 0$$

Esto muestra que el valor máximo de V es $\frac{400\pi}{9}$ cuando $r = \frac{10}{3}$ y $h = 4$.

Problema 8-15 Una ventana tiene la forma que indica la Figura 8-31. ¿Cuál es la forma de la ventana para que entre el máximo de luz para un perímetro dado?

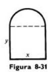


Figura 8-31

Solución. Sea x = ancho, y = altura, A = área, P = perímetro.

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{8},\ P = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$$

Como A debe ser máximo, $\frac{dA}{dx} = 0$, y como P es constante se obtiene $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow xy' + y + \pi x/4 = 0$ y $1 + 2y' + \pi/2 = 0$.

Resolviendo para y' e igualando resultados, $\frac{\pi}{4} + \frac{y}{x} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2y$. Es decir, el ancho del rectángulo debe ser el doble de su altura; como $x = 0$ o $y = 0$ darían áreas nulas, $x = 2y$ debe dar el área máxima.

Problema 8-16 Halle las dimensiones del máximo cilindro recto circular que se puede inscribir en una esfera de radio 12 cm. (Vea Fig. 8-32.)

Solución. Sea x = radio del cilindro, $2y$ su altura y V su volumen. Tenemos

$$V = 2\pi x^2 y;\ x^2 + y^2 = 144;$$
$$V' = 2\pi x^2 y' + 4\pi xy = 0;\ 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

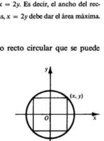


Figura 8-32

Remplazando este último valor en V' se obtiene

$$2\pi x^2\left(-\frac{x}{y}\right) + 4\pi xy = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{y} + 2y = 0,\ x \neq 0$$

Entonces $\sqrt{2}y = x$. Este valor da evidentemente un volumen V máximo, porque $x = 0$ o $y = 0$ darían volúmenes mínimos.

De $x^2 + y^2 = 144$ y $\sqrt{2}y = x$ se obtiene $2y^2 + y^2 = 144 \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$ y $x = 4\sqrt{6}$.

Problema 8-17 Dos edificios están a 150 y 100 pies, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una red eléctrica. AB es igual a 200 pies. Los dos edificios se van a conectar a un mismo punto de la línea de transición. ¿Cuál es la distancia de este punto a A para que se emplee el mínimo de alambre? (Vea Fig. 8-33.)

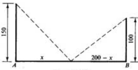


Figura 8-33

Solución. Sea x la distancia del punto de conexión a A y y la longitud del alambre empleado. Tomemos 50 pies como unidad.

$$y = \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 2^2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{2(4 - x)(-1)}{2\sqrt{(4 - x)^2 + 4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(4 - x)^2 + 4} = (4 - x)\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow x^2[(4 - x)^2 + 4] = (4 - x)^2 (x^2 + 9) \Leftrightarrow 4x^2 = 9(4 - x)^2$$

Entonces $-2x = 3(4 - x)$; por tanto, $x = 12$, lo cual es imposible. $2x = 3(4 - x)$ da $x = 12/5$ unidades. $x = 120$ pies. ¿Por qué es mínimo?

Problema 8-18 Un recipiente tiene la forma que indica la Figura 8-34. Ambos lados forman el mismo ángulo con la base. ¿De qué ancho $= a$ debe ser la parte superior para que el recipiente tenga un volumen máximo?

Solución. Sea x el ancho de la parte superior y A el área de la sección. A se debe maximizar. La profundidad del recipiente es

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{x - a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}\,; \; A = \frac{x + a}{2} \frac{\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}}{2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}\left[\frac{(x + a)(2a - 2x)}{2\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}} + \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}\right] = \frac{(2a - x)(a + x)}{2\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}} = 0$$

Como x debe ser positivo, $x = 2a$ es la única solución. Si $x < 2a \Rightarrow \frac{dA}{dx} > 0$. Si $x > 2a$, entonces $\frac{dA}{dx} < 0$, entonces $x = 2a$ para que el volumen sea máximo.

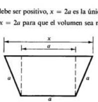


Figura 8-34

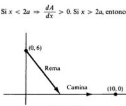


Figura 8-35

Problema 8-19 Un hombre está en una isla a 6 km de una playa. Desea llegar a un punto sobre la playa situado a 10 km del punto más cercano a la isla. Si rema 3 km/h y camina a 5 km/h, ¿cuál es la ruta más rápida? (Vea Fig. 8-35.)

Solución. $0 \le x \le 10$. El tiempo empleado en el viaje es: rema, $\sqrt{36 + x^2}$ km, y como rema a 3 km/h, el tiempo empleado en remar es $\sqrt{36 + x^2}/3$ h. La distancia que camina es $10 - x$, y como camina a 5 km/h, el tiempo empleado en caminar es $(10 - x)/5$ h. El tiempo total es $\sqrt{36 + x^2}/3 + (10 - x)/5$.

Sea $f(x) = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{3} + \frac{10 - x}{5}$. Se va a calcular el máximo global de $f(x)$ sobre $[0, 10]$.

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{5}$. Haciendo $f' = 0$, se obtiene $\frac{x}{3\sqrt{36 + x^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}$

El único valor de x en el intervalo $[0, 10]$ para el cual $f'(x) = 0$ es $x = 9/2$. Vamos a ver si en $x = 9/2$ hay un máximo o mínimo local. Como $f(x)$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, 10]$ tiene un mínimo en él, y además $f(x)$ es derivable para todos los valores de x; entonces $f(x)$ tiene el mínimo en uno de los tres puntos 0, 10 o 9/2. Ahora $f(0) = 4$, $f(10) = \sqrt{136}/2$, $f(9/2) = 18/5$. El mínimo de estos tres puntos es 18/5; por tanto, el mínimo se presenta en $x = 9/2$.

Esto dice que la via más rápida es: remar hasta el punto situado a 4 km del punto más cercano a la isla y después caminar.

Problema 8-20 ¿Cuál es el cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a un hemisferio de radio a? (Vea Fig. 8-36.)

Solución. Sea r = radio de la base del cono y h su altura.

$$r = a/\cos\theta,\ h = a/\operatorname{sen}\theta;\ V = V(\theta) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}$$

Como $\lim_{\theta \to 0^+} V(\theta) = \lim_{\theta \to \pi/2^-} V(\theta) = +\infty$ se deben considerar los valores de θ en el intervalo $]0, \pi/2[$. Es evidente que el cono tiene volumen mínimo cuando la función $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ que aparece en el denominador alcanza su valor máximo.

$f'(\theta) = -2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + \cos^3\theta = 2\cos^3\theta(1/2 - \operatorname{tg}^2\theta)$, que es cero para $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}} = 35°$. Como f' cambia de más a menos al pasar por θ_0, f tiene un máximo en θ_0. Entonces $V(\theta)$ tiene un mínimo local en θ_0.

El mínimo global lo debe alcanzar en un punto interior al intervalo abierto, y como no hay sino uno, el mínimo es global. Entonces $V(\theta)$ no tiene máximo global en $]0, \pi/2[$.

Como $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, el máximo que se puede circunscribir en el hemisferio tiene las siguientes dimensiones:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a,\ h = \sqrt{3}a, \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$

Como el volumen del hemisferio es $\frac{2}{3}\pi a^3$, la relación entre el volumen del cono y el hemisferio es

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ y } 1,3$$

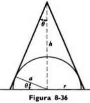


Figura 8-36

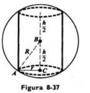


Figura 8-37

Problema 8-21 Halle el volumen del cilindro recto circular máximo que se puede inscribir en una esfera de radio R. (Vea Fig. 8-37.)

Solución. El volumen del cilindro es $\pi r^2 h$, que depende de r y h. Se puede eliminar una de estas variables empleando la relación $r^2 + (h/2)^2 h = R^2$ (aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC).

Entonces $\pi\left(R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h = \pi R^2 - \frac{\pi h^3}{4}$.

Sea $f(x) = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$.

Como el cilindro se inscribe en la esfera $0 \le h \le 2R$, los valores $h = 0$ y $h = 2R$ no tienen interés porque en este caso el volumen del cilindro es 0. Se quiere entonces hallar el máximo de $f(h)$ sobre $]0, 2R[$. Entonces el máximo se presenta en un punto interior donde $f'(h) = 0$. Ahora,

$$f'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}. \text{ Si } f'(h) = 0 \Rightarrow h = \pm\sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

Entonces el valor medio se presenta en $h = \sqrt{\frac{4R^2}{3}}$ porque con signo menos no tiene sentido.

$$f\left(\sqrt{\frac{4R^2}{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \text{volumen máximo}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Funciones crecientes y decrecientes. Máximos y mínimos

1. Determine dónde es creciente y dónde es decreciente cada una de las siguientes funciones. Bosqueje un grafo de cada una.

a) $x^3 - 3x^2 + 2$.
b) $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.
c) $(1 - x^2)^2$.
d) $x + |x|$.
e) $(\operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$.
f) $x\sqrt{4x - x^2}$.
g) $x + \left(\frac{1}{x}\right)$.
h) $x + |\operatorname{sen} x|$.
i) $\sqrt{x}/(1 + x)$.
j) $x - [x]$.
k) $\operatorname{sen} x - 3\cos(x/3)$.
l) $x^3/(1 + x^4)$.
m) $\operatorname{sen} x \cos 2x$.
n) $x - 2\operatorname{sen} x$.
o) $(1 - x + x^2)/(1 + x + x^2)$.

Resp.: *c)* La función es creciente sobre el intervalo $[-1, 0]$ y el intervalo $[1, +\infty[$. Es decreciente sobre los intervalos $]-\infty, -1]$ y $[0, 1]$. (Vea Fig. 8-38.)

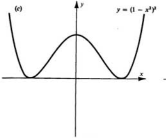


Figura 8-38

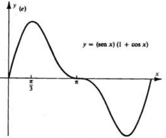


Figura 8-39

e) La función es creciente sobre los intervalos de la forma $[-\pi/3 + 2n\pi, \pi/3 + 2n\pi]$, donde n es un entero. El grafo de $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la Figura 8-39.

g) La función es creciente sobre los intervalos $]-\infty, -1]$ y $[1, +\infty[$. Es decreciente sobre los intervalos $[-1, 0[$ y $]0, 1]$. (Vea Fig. 8-40.)

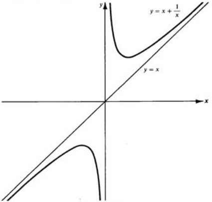


Figura 8-40

Nota. Creciente $\Leftrightarrow$ conserva el orden; decreciente $\Leftrightarrow$ invierte el orden.

2. *a*) Pruebe el siguiente resultado: Suponga que $f(0) = g(0)$ y que $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq 0$. Entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$. (*Nota.* Considere $h = g - f$.)

Interprete este resultado geométricamente.

b) Partiendo de la desigualdad $\cos x \leq 1$ use *a*) para deducir en orden las desigualdades

$$\operatorname{sen} x \leq x, \ \cos x \geq 1 - x^2/2, \ \operatorname{sen} x \geq x - x^3/6 \ \text{para } x \geq 0$$

c) Dados los desarrollos en series de potencias de seno y coseno:

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

donde el subíndice n de S_n y C_n indica el número de términos de la serie.

Pruebe por inducción que

$$S_{2n}(x) \leq \operatorname{sen} x \leq S_{2n-1}(x) \ \text{y} \ C_{2n}(x) \leq \cos x \leq C_{2n-1}(x), \text{ para todo } n \in \mathbf{Z}^+ \ \text{y} \ x \geq 0$$

d) Usando coordenadas rectangulares represente las funciones sen, S_2 y S_3.

e) Usando *c*) pruebe que si $0 \leq x \leq \pi/4$; entonces los polinomios

$$S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ \text{y} \ C_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

pueden usarse para computar sen x y cos x con aproximación a tres decimales.

f) Encuentre un polinomio que pueda usarse para calcular sen x con aproximación de siete decimales para valores de $x \in [0, \pi/4]$.

g) Use las desigualdades de *c)* y los razonamientos apropiados para calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} (\text{sen } x - x)/x^3,\ \lim_{x\to 0} (\cos x - 1)/x^2,\ \lim_{x\to 0} (x \cos x - \text{sen } x)/(x \text{ sen}^2 x)$$

h) Pruebe que la función $f(x) = \begin{cases} (\text{sen } x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tiene una derivada continua en cero.

Resp.: *e)* Si $0 \leq x \leq \pi/4$, entonces

$$0 \leq S_3(x) - \text{sen } x \leq \frac{x^7}{7!} \leq \frac{(\pi/4)^7}{7!} < 0{,}0005$$

g) $-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}$.

3. Pruebe que $\dfrac{\text{tg } x_2}{\text{tg } x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$ si $0 < x_1 < x_2 < \pi/2$.

4. Muestre que $\dfrac{\text{tg } x}{x} > \dfrac{x}{\text{sen } x}$ si $0 < x < \pi/2$.

Nota. Una desigualdad equivalente es $\dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2 \cos^2 x} > 1$.

Muestre que esto prueba que la expresión de la izquierda es creciente sobre $0 < x < \pi/2$.

5. *a)* Sea $f(x) = \begin{cases} x + x^{4/3} \text{ sen } (1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Muestre que $f'(0) = 1$ y, sin embargo, no hay un entorno en el cual f sea creciente (es decir, en el cual conserve el orden).

b) Si $f'(x_0) > 0$, pruebe que existe un $\delta > 0$ tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$

Decimos en tal situación que f conserva el orden en x_0 (es estrictamente creciente en x_0).

c) Explique cuál es la diferencia (si la hay) entre decir que f conserva el orden en x_0 y que f conserva el orden sobre un entorno o conjunto S.

6. Sitúe todos los extremos locales de cada una de las siguientes funciones. Aplique la prueba de la primera derivada.

a) $8x^3 - 9x^2 + 1$. *c)* $x^2 + \dfrac{16}{x}$. *e)* $\text{tg } x - 8 \text{ sen } x$.

b) $\sqrt{x(a - x)}$. *d)* $(\text{sen } x)(1 + \cos x)$. *f)* $x^{3/2}(x - 18)^{-1/2}$.

Resp.: *a)* Máximo local en 0, mínimo local en 3/4.
b) Máximo local en $a/2$.
c) Mínimo local en 2.
d) Máximo local en todos los puntos de la forma $\pi/3 + 2n\pi$, n entero; mínimo local en todos los puntos de la forma $-\pi/3 + 2n\pi$, n entero.
e) La misma respuesta que en *d)* con «máximo» y «mínimo» intercambiados.
f) Mínimo local en 27.

7. Halle los extremos globales de las siguientes funciones sobre **R**.

a) $x^2 - 3x + 4$. *c)* $x^4 - 2x^2 + 5$. *e)* $x^2/x^2 + 1$.
b) $x^4 - 2x^2 - 1$. *d)* $1 + 6|x| + 3x^2$. *f)* $\text{sen}^2 x$.

Resp.: *a)* min 7/4 en 3/2, no max; *b)* min -2 en ± 1, no max; *c)* min 4 en ± 1, no max; *d)* min 1 en 0, no max; *e)* min 0 en 0.

8. Halle los extremos de las siguientes funciones sobre los intervalos indicados:

a) $x + \dfrac{1}{x}$ sobre $]0, +\infty[$. *Resp.:* min 2 en 1, no max

b) sen $\frac{1}{x}$ sobre $\mathbf{R} - \{0\}$. *Resp.:* min -1 en $\left[\frac{\pi}{2}(4n-1)\right]^{-1}$, max 1 en $\left[\frac{\pi}{2}(4n+1)\right]^{-1}$

c) $2 + 7|x| - 3x^2$ sobre $[-2, 7]$. *Resp.:* min -96 en ± 7, max 73/12 en $+7/6$

d) $|\text{sen } x|$ sobre **R**. *Resp.:* min 0 en πn, max 1 en $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

e) $\frac{1}{x^2+1}$. *Resp.:* max 1 en 0, no min

f) $1 - |x - 1|$. *Resp.:* max 1 en 1, no min

9. Suponiendo que el extremo mencionado exista demuestre que:

a) $\max f = \min f \Leftrightarrow f =$ constante.
Resp.: $\min f \le f(x) \le \max f$ y $\min f = \max f \Rightarrow f(x) = \max f$

b) $A = \max f \Leftrightarrow -A = \min(-f)$.
Resp.: $f(x) \le A \Rightarrow (-f)(x) \ge -A$

c) $A = \max f \Rightarrow A + C = \max(f + C)$.
Resp.: $f(x) \le A \Rightarrow f(x) + C \le A + C$

d) $A = \max f$ y $C > 0 \Rightarrow CA = \max(Cf)$.
Resp.: $f(x) \le A \Rightarrow Cf(x) \le CA$

e) $A = \max f$ y $f > 0 \Rightarrow A^2 = \max f^2$.
Resp.: $f(x) \le A \Rightarrow Cf(x) \le CA$

10. Halle la distancia mínima del punto $(a, 0)$ a la recta $\{(x, y): y = mx, x \in \mathbf{R}\}$, $m =$ constante.

11. Exprese el número 5 como suma de dos números tales que la suma de sus cuadrados sea mínima. Generalice para un número cualquiera *n*.
Resp.: $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$

12. Exprese el número 5 como suma de tres números tales que la suma de dos de ellos sea igual a tres veces el tercero y tales que su producto sea máximo.
Resp.: $\frac{15}{8} + \frac{15}{8} + \frac{5}{4}$

13. Se quiere construir una caja rectangular de una lámina de 8×5 cm, cortando un cuadrado en cada esquina y doblando. Halle el lado del cuadrado para que el volumen sea máximo.

14. *a*) Suma constante, principio del máximo producto. Dado un número positivo *S* pruebe que entre todos los números positivos *x* y *y*, con $x + y = S$, el producto xy es mayor cuando $x = y = \frac{1}{2}S$.

Prueba. Si $x + y = S$, entonces $y = S - x$ y el producto xy es igual a $x(S - x) = xS - x^2$. Sea $f(x) = xS - x^2$. Este polinomio cuadrático tiene una primera derivada $f'(x) = S - 2x$ que es positiva para $x < \frac{1}{2}S$ y negativa para $x > \frac{1}{2}S$. Por tanto, el máximo de xy ocurre cuando $x = \frac{1}{2}S$, $y = S - x = \frac{1}{2}S$. Esto puede probarse también sin el uso del cálculo. Simplemente escribimos $f(x) = \frac{1}{4}S^2 - \left(x - \frac{1}{2}S\right)^2$ y observamos que $f(x)$ es máxima cuando $x = \frac{1}{2}S$.

b) Producto constante, principio de la mínima suma. Dado un número positivo *P* pruebe que entre todos los números positivos *x* y *y*, con $xy = P$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$.

Prueba. Debemos determinar el mínimo de la función $f(x) = x + \frac{P}{x}$ para $x > 0$. La primera derivada es $f'(x) = 1 - \frac{P}{x^2}$. Es negativa para $x^2 < P$ y positiva para $x^2 > P$, y así $f(x)$ tiene un mínimo en $x = \sqrt{P}$. Por tanto, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$.

c) La media geométrica de dos números positivos no excede su media aritmética. Esto es,

$$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a + b)$$

Prueba. Dados $a > 0$ y $b > 0$, sea $P = ab$. Entre todos los positivos x y y, con $xy = P$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = \sqrt{P}$. En otras palabras, si $xy = P$, entonces $x + y \geq \sqrt{P} + \sqrt{P} = 2\sqrt{P}$. En particular, $a + b \geq 2\sqrt{P} = 2\sqrt{ab}$, así $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$. La igualdad se presenta solamente si $a = b$.

d) Un bloque de peso W es movido sobre una tabla plana por una fuerza que forma un ángulo θ con la dirección del movimiento, donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$, como se muestra. Suponiendo que al movimiento se opone una fuerza de rozamiento proporcional a la fuerza normal con que el bloque presiona perpendicularmente contra la superficie de la tabla, encuentre el ángulo θ para el cual la fuerza necesaria para vencer el rozamiento es mínima. (Vea Fig. 8-41.)

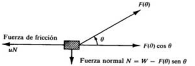


Figura 8-41

Resp.: Sea $F(\theta)$ la fuerza aplicada. Tiene una componente vertical hacia arriba $F(\theta)$ sen θ, así que la fuerza normal neta que presiona contra la tabla es $N = W - F(\theta) \operatorname{sen} \theta$. La fuerza de rozamiento es uN, donde u es una constante llamada coeficiente de rozamiento. La componente horizontal de la fuerza aplicada es $F(\theta) \cos \theta$. Cuando ésta iguala a la fuerza de rozamiento obtenemos

$$F(\theta) \cos \theta = u[W - F(\theta) \operatorname{sen} \theta]$$

de donde

$$F(\theta) = \frac{uW}{\cos \theta + u \operatorname{sen} \theta}$$

Para minimizar $F(\theta)$, maximizamos el denominador $g(\theta) = \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. En los puntos extremos tenemos $g(0) = 1$ y $g(\pi/2) = u$. En el interior del intervalo tenemos

$$g'(\theta) = -\operatorname{sen} \theta + u \cos \theta$$

por tanto, g tiene un punto crítico en $\theta = \alpha$, donde sen $\alpha = u \cos \alpha$. Esto da $g(\alpha) = \cos \alpha + u^2 \cos \alpha = (1 + u^2) \cos \alpha$. Podemos expresar $\cos \alpha$ en términos de u. Debido a que $u^2 \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ encontramos $(1 + u^2) \cos^2 \alpha = 1$, y $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + u^2}$. Así, $g(\alpha) = \sqrt{1 + u^2}$. Debido a que $g(\alpha)$ excede a $g(0)$ y $g(\pi/2)$, el máximo de g ocurre en el punto estacionario. Por tanto, la fuerza mínima requerida es

$$F(\alpha) = \frac{uW}{g(\alpha)} = \frac{uW}{\sqrt{1 + u^2}}$$

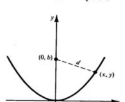


Figura 8-42

e) Encuentre la distancia más corta de un punto dado $(0, b)$ sobre el eje Y a la parábola $x^2 = 4y$. (El número b puede tener cualquier valor real.)

Resp.: La parábola se muestra en la Figura 8-42. La cantidad que se va a minimizar es la distancia d, donde

$$d = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}$$

sujeta a la restricción $x^2 = 4y$. Es claro por la figura que cuando b es negativo la distancia mínima es $|b|$. Cuando el punto se mueve hacia arriba sobre el eje Y, el mínimo es b hasta que el punto alcanza una determinada posición, arriba de la cual el mínimo es $< b$. La localización exacta de esta posición se determinará ahora. Primeramente observamos que el punto (x, y), que minimiza d, también minimiza d^2. En esta situación podemos expresar d^2 solo en términos de x o solo en términos de y. Expresaremos d^2 en términos de y y dejamos al lector como ejercicio hacer el cálculo cuando d^2 se expresa en términos de x.

Por tanto, la función a minimizar está dada por la fórmula

$$f(y) = d^2 = 4y + (y - b)^2$$

Aunque $f(y)$ es definida para todos los valores reales de y, la naturaleza del problema requiere que busquemos el mínimo solo entre los $y \geq 0$. La derivada, dada por $f'(y) = 4 + 2(y - b)$, es cero solo cuando $y = b - 2$. Cuando $b < 2$ llegamos a un punto crítico negativo y, que está excluido por la restricción $y \geq 0$. En otras palabras, si $b < 2$, el mínimo no ocurre en un punto crítico estacionario. En efecto, cuando $b < 2$, vemos que $f'(y) > 0$ cuando $y \geq 0$, y, por tanto, f es creciente para $y \geq 0$. De donde el mínimo absoluto ocurre en el punto final $y = 0$. El mínimo correspondiente d es $\sqrt{b^2} = |b|$.

Si $b \geq 2$ hay un punto estacionario en $y = b - 2$. Debido a que $f''(y) = 2$ para todo y, la derivada f' es creciente, y, por tanto, el mínimo absoluto de f ocurre en este punto crítico. El mínimo d es $\sqrt{4(b-2)+4} = 2\sqrt{b-1}$. Por tanto, hemos mostrado que la distancia mínima es $|b|$ si $b < 2$ y $2\sqrt{b-1}$ si $b \geq 2$. (El valor $b = 2$ es el valor especial al que se alude arriba.)

15. Entre todos los cilindros circulares rectos de área lateral dada, pruebe que la esfera circunscrita más pequeña tiene un radio $\sqrt{2}$ veces el del cilindro.

16. Encuentre el trapezoide de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, siendo la base inferior el diámetro.

Resp.: Trapezoide isósceles, base inferior el diámetro, base superior igual al radio.

17. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1 encuentre el mayor valor de $2a + b$. *Resp.:* $\sqrt{5}$

18. La esquina inferior derecha de una página se dobla hasta alcanzar el lado mayor izquierdo. Si el ancho de la página es de 6 pulgadas encuentre la longitud mínima del pliegue. ¿Qué ángulo hará este pliegue mínimo con el lado mayor derecho de la página? Suponga que la página es lo bastante larga para evitar que el pliegue alcance la parte superior de la página. (Vea Fig. 8-43.)

Resp.: Pliegue $= \frac{9}{2}\sqrt{3}$ pulgadas; ángulo $=$ arc tg $\frac{\sqrt{2}}{2}$

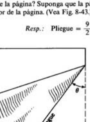


Figura 8-43

CAPITULO 9

Teorema del valor medio para primeras derivadas

Teorema de Rolle. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y f derivable sobre $]a, b[$. Entonces $f(a) = 0 = f(b) \Rightarrow$ existe un $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

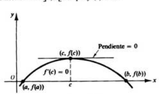


Figura 9-1

Demostración. Según el teorema de los valores extremos y la hipótesis de la continuidad de f en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, se sabe que f tiene un máximo y un mínimo global en $[a, b]$.

Caso 1. Supongamos que f alcanza un máximo y un mínimo en los puntos extremos a y/o b. Entonces la hipótesis $f(a) = 0 = f(b)$ dice que $0 \leq f(x) \leq 0$ para todos $x \in [a, b]$.

En este caso, $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$. Como f' es cero, todo punto entre a y b sirve para desempeñar el papel del punto c.

Caso 2. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo global en algún punto interior de $[a, b]$. Supongamos que $f(x_0)$ es un máximo y $a < x_0 < b$.

El teorema del extremo estacionario afirma que $f'(x_0) = 0$; por tanto, x_0 sirve de punto intermedio c de la conclusión.

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Rolle.

Teorema del valor medio para primeras derivadas. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$. Entonces existe c tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ y $c \in]a, b[$.

Demostración. La demostración se basa en el estudio de la función

$$E(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right]$$

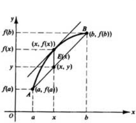


Figura 9-2

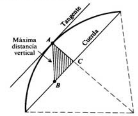


Figura 9-3

que se deduce como sigue: $E(x) = f(x) - y, f(x)$ la ordenada sobre la curva y y la ordenada sobre la recta que pasa por AB

$$y = f(a) + m(x - a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Entonces

$$E(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

que mide el desplazamiento vertical del grafo de f a la cuerda de extremos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (Fig. 9-2). La clave de la demostración está en que la pendiente $f'(x)$ de la curva se espera que sea igual a la pendiente $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ de la cuerda extrema en el punto c, en el cual $E(c)$ es un máximo local.

La idea surge cuando consideramos el segmento circular (Fig. 9-3) en el cual se demuestra que el punto sobre el segmento circular en el cual la tangente es paralela a la cuerda que pasa por los extremos tiene la propiedad de que la distancia vertical entre la cuerda y el arco es máxima.

En dicha función es $E(a) = 0 = E(b)$; por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle.

La función $E(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$ porque f y $x - a$ son funciones continuas sobre $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$.

Esto hace que se cumplan las tres condiciones del teorema de Rolle. Luego el teorema de Rolle asegura que existe $c \in]a, b[$ tal que $E'(c) = 0$. Calculando E' y haciéndola igual a cero se obtiene

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{y} \quad a < c < b \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es lo que se quería demostrar.

Como se verá, el teorema del valor medio es uno de los instrumentos más útiles del cálculo. Cuando el lector encuentre la diferencia $f(b) - f(a)$ piense que se puede remplazar por $f'(c)(b - a)$ con $a < c < b$.

En física se emplea el T.V.M. (teorema del valor medio) cuando se dice que la diferencia de temperaturas entre los extremos de una barra es igual a la razón media de cambio de la temperatura por unidad de longitud por la longitud de la barra, suponiendo que la temperatura es constante sobre las secciones. En cinemática, el desplazamiento $f(b) - f(a)$ se obtiene al multiplicar la velocidad media $f'(c)$ por la duración $b - a$ del intervalo de tiempo. Si se calienta un alambre uniformemente, sufre una dilatación; el T.V.M. dice que la longitud resultante es igual a la longitud original multiplicada por la razón de dilatación por unidad de longitud en un punto medio c sobre el alambre.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 9-1 Sea $f(x) = 4x^3 - 9x$. Verifique que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en los siguientes intervalos: $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$, $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ y $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Halle un valor apropiado de c en cada uno de estos intervalos para los cuales $f'(c) = 0$.

Solución. $f'(x) = 12x^2 - 9$; f es continua sobre **R** y derivable, esto muestra que se cumple la condición de continuidad y derivabilidad. Haciendo $f(x) = 0$ se encuentra que

$$4x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2},\ x = 0 \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

Si se toma a $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 0$, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$. Análogamente, se demuestra que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ y $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Para hallar los valores adecuados de c hacemos $f'(c) = 0$ y se obtiene

$$12c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces para el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$, $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. En $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y en $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, c puede ser igual a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 9-2 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, verifique que las hipótesis del teorema del valor medio se satisfacen para $a = 1$ y $b = 3$. Halle todos los números c en el intervalo $]1, 3[$ tales que

$$f'(c) = [f(3) - f(1)]/(3 - 1)$$

Solución. Como f es un polinomio, f es continua y derivable para todo $x \in$ **R**. Entonces las hipótesis del teorema del valor medio se satisfacen para cualquier a y b. $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$, $f(1) = -7$, $f(3) = -27$. Entonces

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10$$

Haciendo $f'(c) = -10$ se obtiene $3c^2 - 10c - 3 = -10 \Leftrightarrow (3c - 7)(c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{7}{3}$, $c = 1$. Como 1 no pertenece al intervalo abierto $]1, 3[$, entonces el único valor que sirve es $c = \frac{7}{3}$.

Problema 9-3 Si $f(x) = x^{2/3}$, muestre que no existe un número c en $]-2, 2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

¿Qué hipótesis del T.V.M. no se cumple para f en $a = -2$ y $b = 2$?

Solución. $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \Rightarrow f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$

$$\frac{f(2) - f(2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4} = 0$$

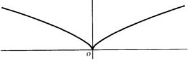


Figura 9-4

No existe c para el cual $\frac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

f es continua en $[-2, 2]$; sin embargo, no es derivable en $]-2, 2[$ porque $f'(0)$ no existe.
Por tanto, la segunda condición de la hipótesis del T.V.M. no se cumple para f cuando $a = -2$ y $b = 2$.

Problema 9-4 Muestre que $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$ si $h > 0$.

Solución. En $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ tomemos a $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$ y $b = h$. Entonces para algún $c \in]0, h[$.

$$\sqrt{1+h} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}h < \frac{1}{2}h$$

Por tanto, $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$.

Problema 9-5 Suponga que f es dos veces derivable sobre $]a, b[$ y f continua en a y b. Muestre que si $f(a) = f(c) = f(b) = 0$ con $a < c < b$, entonces existe un punto $d \in]a, b[$ tal que $f''(d) = 0$.

Solución. Por el teorema de Rolle, $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$ para $c_1 \in]a, c[$ y $c_2 \in]c, b[$, respectivamente.
Aplicando de nuevo el teorema de Rolle a f' que desempeña ahora el papel de f, se tiene que $f''(d) = 0$ para algún $d \in]c_1, c_2[\Rightarrow d \in]a, b[$. ¿Por qué?

Problema 9-6 Pruebe que si $f'(x)$ es positiva, entonces $f(x)$ tiene a lo más dos raíces.

Solución. Si $f(x)$ tiene dos raíces, entonces, por el teorema de Rolle para algún valor c entre las dos raíces, $f'(c) = 0$.

Problema 9-7 *a)* Muestre que si $f(x)$ tiene n raíces en $[a, b]$, entonces $f'(x)$ tiene por lo menos $n - 1$ raíces. *b)* ¿Qué conclusión saca con respecto al número máximo de raíces distintas de un polinomio de grado n?

Solución. *a)* Si las raíces están dadas por $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, entonces, por el teorema de Rolle, existen valores c_k con $x_k < c_k < x_{k+1}$ tales que $f'(c_k) = 0$.

b) Como la n-ésima derivada de un polinomio de grado n es una constante distinta de cero, se sigue que $f^{(n-1)}(x)$ puede tener a lo más una raíz; entonces $f^{(n-2)}(x)$ puede tener a lo más dos raíces, etc.

Problema 9-8 Muestre que $x > \operatorname{sen} x$ para x positivo y $x < \operatorname{tg} x$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Solución. Para $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ se tiene que $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Entonces f no es decreciente y es estrictamente creciente en $]0, 2\pi[$. Por tanto, $f(x) > f(0) = 0$. Para $g(x) = \operatorname{tg} x - x$ se tiene que

$$g'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 > 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

así g es creciente estrictamente para $0 \leq x \leq \pi/2$ y $g(x) > g(0) = 0$.

Problema 9-9 Si la función continua $f(x)$ posee derivada en cada punto de un entorno de $x = \xi$ y si $f'(x)$ se aproxima a un límite L cuando $x \to \xi$, entonces $f'(\xi)$ existe y es igual a L.

Solución. Por el teorema del valor medio, $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(u)$ con $|u - \xi| < |x - \xi|$.

Tomando el límite cuando $x \to \xi$ se obtiene $f'(\xi) = L$.

Problema 9-10 Si $f(x)$ es continua y derivable en $a \leq x \leq b$, muestre que si $f'(x) \leq 0$ en $a \leq x < \xi$ y $f'(x) \geq 0$ en $\xi < x \leq b$, la función no es nunca menor que $f(\xi)$.

Solución. Para $a \leq x < \xi$ se tiene, por el teorema del valor medio, para algún u entre x y ξ,

$$f(\xi) - f(x) = f'(u)(\xi - x) \leq 0$$

Para $\xi < x \leq b$ se tiene, para algún v entre ξ y x, $f(x) - f(\xi) = f'(v)(x - \xi) \geq 0$.

Problema 9-11 Sea $f(x)$ definida y derivable sobre **R**. Muestre que si $f(0) = 0$, y en todas partes $|f'(x)| \leq |f(x)|$, entonces $f(x) = 0$.

Solución. Aplicando repetidamente el teorema del valor medio se tiene $|f(x)| = |f'(x_1)| \cdot |x|$, $|x_1| \leq |x|$ porque $|f(x) - f(0)| = |x - 0|\,|f'(x_1)|$

$$\begin{aligned}
&\leq |f(x_1)| \cdot |x| \\
&\leq |f'(x_2)x_1| \cdot |x|, \; |x_2| \leq |x_1| \\
&\leq |f'(x_2)| \cdot |x|^2 \\
&\leq |f(x_2)| \cdot |x|^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\leq |f(x_n)| \cdot |x|^n, \; |x_n| \leq |x_{n-1}|
\end{aligned}$$

como $f(x)$ es continua para $|x| \leq 1$, es acotada, y, por tanto, para $|x| < 1$ se tiene pasando al límite cuando $n \to \infty$, $|f(x)| = 0$. Por la continuidad también se tiene que $f(x) = 0$ para $x = \pm 1$.

El razonamiento se puede repetir para los nuevos orígenes $x = \pm 1, \pm 2, \ldots$, para extender el resultado a la recta total.

Teorema de la función constante. Hipótesis, las del teorema de Rolle. Entonces $f'(x) = 0$ sobre $]a, b[\;\Rightarrow f(x) = C$, para una constante C, es decir, $f(x) = f(x_0)$ sobre $[a, b]$ para cualquier $x_0 \in [a, b]$.

Demostración. Sea x_0 un punto dado en $[a, b]$ y $x \in [a, b]$. Mostramos que $f(x) - f(x_0) = 0$.

Por el T.V.M.,

$$f(x) - f(x_0) = f(c)(x - x_0) \text{ y } x \lesseqgtr c \lesseqgtr x_0 \qquad (9\text{-}1)$$

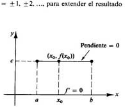


Figura 9-5

Por hipótesis, $f' = 0$ sobre $]a, b[$; por tanto, en particular, $f(c) = 0$. De (9-1) se tiene que $f(x) - f(x_0) = 0$, como se pedía, $\Rightarrow f(x) = f(x_0)$, es decir, f es constante sobre $[a, b]$.

Teorema de la diferencia constante. Sea $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ y $h: [a, b] \to \mathbf{R}$, g y h continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre $]a, b[$. Entonces $g'(x) = h'(x)$ sobre $]a, b[\Rightarrow g(x) - h(x) = C$ sobre $[a, b]$; para una constante C, es decir, $g(x) - h(x) = g(x_0) - h(x_0)$ sobre $[a, b]$ para cualquier $x_0 \in [a, b]$.

Demostración. La clave de la demostración está en mostrar que la función (9-1) $f(x) = g(x) - h(x)$, $x \in [a, b]$ es de derivada cero en $]a, b[$ y, por tanto, es una función constante. Derivando se obtiene

$$f'(x) = [g(x) - h(x)]' = g'(x) - h'(x) \text{ sobre }]a, b[\tag{9-2}$$

Por hipótesis, $g'(x) = h'(x)$ para todo $x \in [a, b]$; por (9-2) se tiene $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$.

Según el teorema de la función constante se tiene $f(x) = f(x_0)$ para cualquier $x_0 \in [a, b]$ y todo $x \in [a, b]$. Según (9-1) se obtiene $g(x) - h(x) = g(x_0) - h(x_0)$.

Teorema de monotonía. Hipótesis, las mismas del teorema del valor medio. Entonces $f' > 0$ (respectivamente < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow f$ conserva el orden (respectivamente invierte el orden) sobre $[a, b]$. En otras palabras, es creciente o decreciente.

Demostración. Por el T.V.M., para cualquier $x_1, x_2 \in [a, b]$ se tiene

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \text{ y } x_1 \lesseqgtr c \lesseqgtr x_2 \tag{9-3}$$

Suponga que $f' > 0$ sobre $]a, b[$. En particular $f'(c) > 0$. Según (9-3), $x_1 < x_2$ y $f'(c) > 0 \Rightarrow f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Así, si $f' > 0$ vemos que $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, es decir, f conserva el orden (en otras palabras, es monótona creciente) sobre $[a, b]$. El caso $f' < 0$ se demuestra en forma análoga.

Teorema del tenedor. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y f derivable sobre $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Entonces: *a)* $f' > 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f' < 0$ sobre $]x_0, b[\Rightarrow f(x_0) = \max f$ sobre $[a, b]$. *b)* $f' < 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f' > 0$ sobre $]x_0, b[\Rightarrow f(x_0) = \min f$ sobre $[a, b]$.

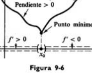


Figura 9-6

Demostración. Apliquemos el teorema de monotonía a $[a, x_0]$ y $[x_0, b]$.

a) Si $f' > 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f' < 0$ sobre $]x_0, b[$, entonces f es monótona creciente sobre $[a, x_0]$ y monótona decreciente sobre $[x_0, b]$. Por tanto, $x \in [a, x_0] \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ y $x \in [x_0, b] \Rightarrow f(x_0) > f(x_0)$. Así, $f(x_0) = \max f$ sobre $[a, b]$.

b) Demostración análoga.

Nota. Es fácil ver que el teorema del tenedor se aplica al caso en que el dominio de f es un intervalo ilimitado I en el cual $f' > 0$ sobre $I \cap]x_0, +\infty[$ y $f' < 0$ sobre $I \cap]-\infty, x_0[$.

Entonces $\min f = x_0$. Análoga para el caso del máximo global.

La función $f(x) = x^3$ no tiene un extremo local en $x_0 = 0$ a pesar de que $f'(0) = 0$, puesto que en el intervalo $[-1, 0]$ es creciente y en $[0, 1]$ creciente. En otras palabras, esto dice que para que una función f derivable tenga un extremo local en punto interior x_0 de su dominio, la condición $f'(x_0) = 0$ es necesaria, pero no suficiente.

Teorema. (Prueba de la primera derivada.) Sea f una función y $f'(x_0) = 0$. Entonces:

a) f tiene un máximo relativo en x_0 si existe un intervalo $]a, b[$ que contiene a x_0 y sobre el cual es derivable; tal que $f'(x) > 0$ para cada x en $]a, x_0[$ y $f'(x) < 0$ para cada x en $]x_0, b[$, es decir, f' cambia de más a menos.

b) f tiene un extremo local en x_0 si $f'(x) < 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f'(x) > 0$ sobre $]x_0, b[$, es decir, f' cambia de menos a más.

c) f no tiene un extremo local en x_0 si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, x_0[$ y todo x en $]x_0, b[$ o $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, x_0[$ y todo x en $[x_0, b[$.

Demostración. *a)* y *b)* Son consecuencias inmediatas del teorema del tenedor.

c) Suponga que $f(x) > 0$ sobre $]a, x_0[$ y sobre $]x_0, b[$. Sea $x \in]a, x_0[$. Entonces $x < x_0$. Entonces, por el teorema de monotonía, f es creciente en $[x, x_0]$. Por tanto, $f(x_0) < f(x)$. Si $x \in]x_0, b[\Rightarrow f$ es creciente en $[x_0, x]$ y, por tanto, $f(x_0) < f(x)$. Por consiguiente, f no puede tener un extremo local en x_0, porque en cualquier intervalo abierto que contenga a x_0 existen puntos x para los cuales $f(x) < f(x_0)$, y puntos x en los cuales $f(x) > f(x_0)$.

Teorema. (Prueba de la segunda derivada.) Sea f una función derivable en el intervalo abierto $]a, b[$ y sea $x_0 \in]a, b[$. Si $f''(x_0) = 0$, entonces:

a) Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

b) Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

c) Si $f''(x_0) = 0$, f no tiene un máximo o mínimo local en x_0 o no tiene ninguno de los dos.

Demostración. Supongamos que se puede calcular $f''(x_0)$. Si $f''(x_0) > 0$, entonces, por el teorema anterior, existe un número positivo δ tal que $f'(x) < 0$ sobre $]x_0 - \delta, x_0[$ y $f'(x) > 0$ sobre $]x_0, x_0 + \delta[$. Entonces, por el teorema anterior, f tiene un mínimo local en x_0.

Si $f''(x) < 0$, se concluye en forma análoga que $f'(x) > 0$ sobre $]x_0 - \delta, x_0[$ y $f'(x) < 0$ sobre $]x_0, x_0 + \delta[$. De nuevo, por el teorema anterior, f tiene un máximo local en x.

Si $f''(x_0) = 0$, no se obtiene ninguna información. Sea $f(x) = x^4$, $f(x) > 0$ para todos los valores de x, excepto $x = 0$, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Si $g(x) = x^4$, $g(x)$ tiene un máximo local en $x = 0$. Si $h(x) = x^3$, $h(x)$ no tiene un extremo local en $x = 0$.

Ahora, $f'(0) = g'(0) = h'(0) = 0$ y $f''(0) = g''(0) = h''(0) = 0$. Entonces, cuando la segunda derivada es cero en un punto donde la primera derivada es cero, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 9-12 Usando el teorema de la función constante muestre que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Solución. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos x \operatorname{sen} x = 0$$

por tanto, f es una función constante, digamos $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = C$ sobre **R**. Calculando f en el origen, se tiene $0^2 + 1^2 = C$. Así, $C = 1$ y $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Problema 9-13 Muestre que la función tangente es monótona creciente en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Solución. Como $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' > 0$ sobre $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Según el teorema de monotonía, $\operatorname{tg} x$ es creciente en este intervalo.

Problema 9-14 Halle los intervalos de monotonía de $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 7$.

Solución. Como $f'(x) = 6x^2 + 18x - 60 = 6(x + 5)(x - 2)$, se tiene

$$\{x : f'(x) < 0\} = \{x : (x + 5)(x - 2) < 0\} = \{x : x + 5 < 0 \text{ y } x - 2 > 0\} \cup \{x : x + 5 > 0 \text{ y } x - 2 < 0\}$$
$$= \{x : x < -5 \text{ y } x > 2\} \cup \{x : x > -5 \text{ y } x < 2\} = \phi \cup]-5, 2[=]-5, 2[$$

Como $\{x : f'(x) = 0\} = \{-5, 2\}$, se tiene que $\{x : f'(x) \leq 0\} = [-5, 2]$; entonces

$$\{x : f'(x) > 0\} = \mathbf{R} - [-5, 2] =]-\infty, -5[\cup]2, \infty[$$

Por el teorema de monotonía, f es monótona creciente sobre $]-\infty, -5]$ y sobre $[2, \infty[$, pero monótona decreciente sobre $[-5, 2]$.

Problema 9-15 Muestre que $f(x) = x^3$ es monótona creciente.

Solución. Como $f'(x) = 3x^2$, se tiene $f' > 0$ sobre $]-\infty, 0[$ y $f' > 0$ sobre $]0, +\infty[$. Por tanto, f es monótona creciente sobre $]-\infty, 0]$ y sobre $[0, +\infty[$. Si $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ o $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, entonces $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Suponga que $x_1 < 0 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$ cuando $f(x_1) < f(x_2)$.

Observe que la solución sirve para cualquier función del mismo tipo con exponente impar.

Problema 9-16 Muestre que $x^n - a = 0$ tiene a lo más una raíz positiva si n es un entero positivo.

Solución. Sea $f(x) = x^n - a$. Entonces $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ sobre $]0, +\infty[$. Entonces f es monótona creciente sobre $[0, +\infty[$. Si $f(r) = 0$, entonces $0 < x_1 < r < x_2 \Rightarrow f(x_1) < 0 < f(x_2)$; $\therefore$ $x \neq r \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \neq 0$ sobre $]0, +\infty[$.

Problema 9-17 Halle los extremos globales de $f(x) = (x - a)^{2/3}$ sobre $\mathbf{R}$.

Solución. Como $f'(x) = 2/3(x - a)^{-1/3}$ sobre $\mathbf{R} - \{a\}$, entonces $f' > 0$ sobre $]a, +\infty[$ y $f' < 0$ sobre $]-\infty, a[$. Entonces, por el teorema del tenedor (en forma extendida), $\min f = f(a) = 0$.

Observe que f' no está definida en a; por tanto, el teorema del extremo estacionario no se puede aplicar.

Problemas de máximos y mínimos. Prueba de la segunda derivada

Problema 9-18 ¿Cuáles son las dimensiones más económicas de una caja rectangular de base cuadrada, con tapa, si se desea que tenga un volumen de 144 cm^3? La parte superior y la base cuestan a 20 centavos el centímetro cuadrado y los lados a 30.

Solución. Sea c = el costo, x = lado de la base cuadrada y y = altura. Entonces

$$c = 2x^2 \cdot 20 + 4xy \cdot 30; \quad x^2y = 144$$

Remplazando el valor de y que da la segunda ecuación en la primera se obtiene

$$c = 40x^2 + 17\,280x^{-1} \Rightarrow c' = 80x - 17\,280x^{-2} \text{ y } c'' = 80 + 34\,560x^{-3}$$

De $c' = 0$ se obtiene el valor crítico $x = 6$. También $c'(0) > 0$. Entonces $x = 6$ da $x = 4320$ como mínimo global. Si $x = 6$, $y = 4$.

Problema 9-19 ¿Cuáles son las proporciones más económicas para un envase cilíndrico de metal?

Solución. Sea V = volumen del cilindro, c su costo y k el costo por pulgada cuadrada de metal. Entonces,

$$c = k(2\pi r^2 + 2\pi rh);\ V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow c = k(2\pi r^2 + 2Vr^{-1});\ \frac{dc}{dr} = k(4\pi r - 2Vr^{-2});$$
$$\frac{d^2c}{dr^2} = k(4\pi + 4Vr^{-3});\ c' = 0 \Leftrightarrow k(4\pi r - 2Vr^{-2}) = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{V^{1/3}}{(2\pi)^{1/3}} \text{ y}$$
$$r^2 = \frac{V^{2/3}}{(2\pi)^{2/3}};\ h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V(2\pi)^{2/3}}{\pi V^{2/3}} = \frac{V^{1/3}2^{2/3}}{\pi^{1/3}};\ \frac{h}{r} = \frac{V^{1/3}2^{2/3}}{\pi^{1/3}} : \frac{V^{1/3}}{(2\pi)^{1/3}} = 2 \Rightarrow h = 2r,$$

es decir, la altura del cilindro debe ser el doble de su diámetro. Como $\frac{d^2c}{dr^2} > 0$, esto da un mínimo global.

Problema 9-20 *a)* Sea $y \neq 0$ y n par. Pruebe que $x^n + y^n = (x + y)^n$ solamente si $x = 0$. *b)* Pruebe que si $y \neq 0$ y n impar, entonces $x^n + y^n = (x + y)^n$ si $x = 0$ o $x = -y$.

Solución. *a)* Sea $h(x) = x^n + y^n - (x + y)^n$ en $[0, x]$. Si $h(x_0) = 0$ para algún $x_0 \neq 0$, por el teorema de Rolle, $0 = h'(x) = nx^{n-1} - n(x + y)^{n-1}$ para $x \in \,]0, x_0[$ o $]x_0, 0[$. Es decir, $x^{n-1} = (x + y)^{n-1}$ para $y \neq 0$, lo cual es imposible porque x^{n-1} es creciente por ser $n - 1$ impar.

b) Sea $h(x) = x^n + y^n - (x + y)^n$. Entonces $h(0) = h(-y) = 0$. Si h es cero en tres puntos $a < b < c$, entonces se puede aplicar el teorema de Rolle a $[a, b]$ y $[b, c]$ para probar que hay dos números x con $0 = h'(x) = nx^{n-1} - n(x + y)^{n-1}$, la cual se verifica únicamente para $x = -(x + y)$ o $x = y/2$.

Problema 9-21 (T.V.M. de Cauchy para funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Sean f y g: $[a, b] \to \mathbf{R}$, continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre $]a, b[$. Entonces existe $c \in \,]a, b[$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ si $g'(t) \neq 0$ para $t \in \,]a, b[$.

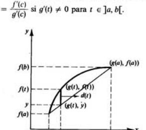


Figura 9-7

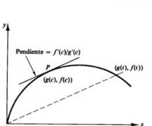


Figura 9-8

Demostración. Vamos a tratar de maximizar el desplazamiento de la cuerda al arco, como lo indica la Figura 9-7. El desplazamiento $d(t)$ está dado por

$$d(t) = f(t) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(t) - g(a)] + f(a) \right\}$$

La ecuación dentro de la llave es la ecuación de una recta. Como $d(a) = 0 = d(b)$, por el teorema de Rolle, $d'(c) = 0$ para algún $c \in \,]a, b[$. Calculando $d'(t)$ se obtienen las fórmulas de la conclusión.

Problema 9-22 (Regla de L'Hospital para 0/0). Sean f y g funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y continuas sobre $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ y derivables en el interior. $\diamondsuit$, uno de los símbolos $t_0, t_0^+, t_0^-, +\infty, -\infty, \infty$. Si $\lim\limits_{t\to\diamondsuit} f = \lim\limits_{t\to\diamondsuit} g = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\diamondsuit} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{t\to\diamondsuit} \dfrac{f'}{g'}$ si $\lim\limits_{t\to\diamondsuit} \dfrac{f'}{g'}$ existe.

Demostración. Vamos a demostrar el teorema en el caso de que t_0 se considere bilateralmente. Como $\lim\limits_{t\to\diamondsuit} f = \lim\limits_{t\to\diamondsuit} g = 0$, podemos extender las dos funciones para que sean continuas en t_0, y, por convención de notación, podemos suponer que $f(t_0) = 0$ y $g(t_0) = 0$. Aplicando el T.V.M. de Cauchy se tiene para cualquier $t \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$:

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{y} \quad t_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr t \tag{1}$$

Como c es un punto elegido para un t dado, se tiene entonces una función $c(t)$ tal que

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'[c(t)]}{g'[c(t)]} \quad \text{y} \quad t_0 \lesseqgtr c(t) \lesseqgtr t \tag{2}$$

La Figura 9-8 muestra el significado geométrico de (2) y el método de demostración. (2) identifica la pendiente de la recta que pasa por el origen con la pendiente de una tangente que pasa por un punto P.

Ahora, como $c(t) \to t_0$ si $t \to t_0$. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f'[c(t)]}{g'[c(t)]} = \dfrac{f'}{g'} \lim\limits_{t\to t_0} [c(t)] = \dfrac{f'}{g'}(t_0)$. Los demás casos se dejan como ejercicio.

Problema 9-23 Pruebe la regla de L'Hospital para el caso ∞/∞. Suponga que f y g son funciones derivables en $]a, b[$ y $\lim\limits_{x\to x_0^+} f = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^+} g = \infty$, $x_0 \in]a, b[$.

Solución. Suponga que x es tal que $a < x_0 < x < x_1 < b$. Por el teorema T.V.M. de Cauchy,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \; x < \xi < x_1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_1)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} \tag{1}$$

Suponga que $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ y escriba (1) como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right)\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right) + L\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right) \tag{2}$$

Se puede elegir x_1 próximo a x_0 tal que $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \varepsilon$. Al hacer fijo a x_1 vemos que

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right) = 1, \text{ puesto que } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$$

Tomando el límite en ambos lados de (2) cuando $x \to x_0^+$, vemos que

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota. Modificaciones apropiadas del procedimiento anterior establecen el resultado si $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$. Las demás formas indeterminadas $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, por medio de cambios algebraicos de la forma, producen una función que se puede manejar empleando la regla de L'Hospital.

Problema 9-24 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{tg} 2x}{x - \operatorname{tg} 2x}$. Este límite es de la forma 0/0.

Solución. Entonces, aplicando la regla de L'Hospital, se obtiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{tg} 2x}{x - \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2\sec^2 2x}{1 - 2\sec^2 x} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

Problema 9-25 Halle $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}}$. Este límite es de la forma 0/0.

Solución. $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x-\pi)^{-1/2}} = \lim_{x\to\pi^+} 2(x-\pi)^{1/2}\cos x = 0.$

Problema 9-26 Calcule $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x$. Este límite es de la forma 0/0.

Solución. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Problema 9-27 Calcule $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x + \sec x)$. Este límite es de la forma $\infty + \infty$.

Solución. $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x}$, que es de la forma 0/0; entonces, aplicando la regla de L'Hospital, se obtiene

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Problema 9-28 Calcule $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+1})$. Este límite es de la forma $+\infty - (+\infty)$.

Solución. Tenemos que $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{(x + \sqrt{x^2+1})} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})} = 0$$

Problema 9-29 Halle $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

Solución. Como $g(0) = 0$ y g es continua en 0, tenemos que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Por tanto, según la regla de L'Hospital,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{2x} = g''(0) = 17/2$$

Problema 9-30 *a)* Dé un ejemplo de una función discontinua con máximo y mínimo global en un intervalo cerrado. *b)* Dé un ejemplo de una función discontinua en un intervalo I tal que f tome todo valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, si $a, b \in I$ y $f(a) \neq f(b)$. *c)* Dé

un ejemplo de una función continua que aplique un intervalo abierto en: 1, un intervalo abierto; 2, un intervalo semiabierto; 3, un intervalo cerrado. *d*) Dé un ejemplo de una función continua que aplique un intervalo infinito en un intervalo finito.

Solución. *a*) La función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } -1 \le x \le 0 \\ -x \text{ si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

no es continua en $x = 0$ y tiene un máximo global en $[-1,1]$ igual a $f(0) = 1$ y un mínimo global igual a $f(1) = -1$.

b) La función

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en cualquier intervalo que contenga el origen, puesto que no es continua en $x = 0$. Sean a y b dos puntos de $I(a < b)$ tales que $f(a) \ne f(b)$. Si $[a, b]$ no contiene el origen, entonces f es continua en $[a, b]$ y, según el teorema del valor medio, toma todo valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ en algún punto de $]a, b[$. Si $[a, b]$ contiene el origen, entonces $[a, b]$ contiene un intervalo

$$I_n = \left[\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right]$$

Si f es continua en I_n y $f\left(\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = -1$, $f\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = 1$. Por el teorema del valor medio, f toma valor entre 1 y -1 en algún punto de I_n distinto de los puntos extremos. Entonces, como $I_n \subset [a, b]$, f toma todo valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ en algún punto de $]a, b[$, como en el primer caso.

c) Considere las funciones:

$$f_a(x) = x,\ f_b(x) = \begin{cases} x \text{ si } -1 < x < 0 \\ 0 \text{ si } \quad 0 \le x < 1 \end{cases},\ f_c(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \text{ si } -1 < x < -\dfrac{1}{2} \\ x \text{ si } -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

todas son continuas en $]-1,1[$. Entonces $f_a(x)$ aplica $]-1,1[$ en $]-1,1[$, $f_b(x)$ aplica $]-1,1[$ en $]-1,0]$ y $f_c(x)$ aplica $]-1,1[$ en $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

d) La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua en el intervalo infinito $]-\infty, +\infty[$ y aplica este intervalo en $]0, 1]$.

Problema 9-31 *a*) Sea $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Halle el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. *b*) Sea $a > 0$. Halle el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

Solución. *a*) Suponga que x y y son puntos en $[a_{j-1}, a_j]$ y $[a_j, a_{j+1}]$ con $|x - a_j| = |y - a_j|$. Entonces $|y - a_i| = |x - a_i| + |y - x|$ para $i \le j - 1$, y $|y - a_i| = |x - a_i| - |y - x|$ para $i \ge j + 1$. Por tanto,

$$f(y) = f(x) + |y - x| \{(j - i) - (n - j)\} = f(x) + |y - x| \{2j - n - 1\}$$

Esto muestra que f decrece hasta alcanzar el punto a_i y después crece. El mínimo se presenta en $a_{\frac{n+1}{2}}$ si n es impar y sobre el intervalo $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$ si n es par.

b) Tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+a-x}, & 0 < x < a \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+x-a}, & a < x \end{cases} \quad \therefore \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0 < x < a \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & a < x \end{cases}$$

Es decir, f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[a, \infty[$. Por tanto, el máximo de f sobre $[0, a]$ es el máximo sobre **R**. Si $f'(x) = 0$ para x en $]0, a[$, entonces

$$(1 + x)^2 - (1 + a - x)^2 = 0 \Rightarrow x = a/2$$

Como $f(a/2) = 4/(2 + a) < \dfrac{2 + a}{1 + a} = f(0) = f(a)$, el valor máximo es $(2 + a)/(1 + a)$.

Problema 9-32 Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Muestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.

Solución. Aplicando el teorema del valor medio a $f - g$, si $x > a$, entonces

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - a} = \frac{f(x) - g(x) - [f(a) - g(a)]}{x - a} = f'(y) - g'(y) > 0 \text{ para algún } y \in]a, x[$$

Como $x - a > 0$, entonces $f(x) - g(x) > 0$. Análogamente, si $x - a < 0$, entonces $f(x) < g(x)$.

Problema 9-33 a) Dé un ejemplo de una función f para la cual $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, pero $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no existe. b) Pruebe que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. c) Muestre que si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f''(x)$ existen, entonces $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Solución. a) Considere la función $f(x) = (\text{sen } x)/x$. Entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pero

$$f'(x) = \frac{2x^2 \text{ sen } x^2 - \text{sen } x^2}{x^2} = 2 \text{ sen } x^2 - \frac{\text{sen } x^2}{x^2} \text{ y } \lim_{x\to\infty} f'(x) \text{ no existe}$$

b) Sea $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Si $L > 0$, entonces existe N tal que $|f'(x) - L| < L/2$ para $x > N$. Esto implica que $f'(x) > |L|/2$. Pero esto implica, según el T.V.M., que $f(x) > f(N) + \dfrac{(x - N)|L|}{2}$ para $x > N$, lo cual significa que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe. En forma análoga, $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ no puede ser menor que 0.

c) Sea $L = \lim_{x\to\infty} f''(x)$. Si $L > 0$, entonces como en a), $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. El T.V.M. da que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, lo cual es contrario a la hipótesis. Análogamente, $f''(x)$ no puede ser menor que 0.

Problema 9-34 a) Pruebe que si $\dfrac{a_0}{1} + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0 \Rightarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$.

b) Suponga que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^n$ para $n > 1$. Pruebe que f es constante. (Considere f'.)

c) Pruebe que la función $f(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene dos raíces en $[0, 1]$, independientemente del valor de m.

Solución. *a*) Sea $f(x) = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$, $f(0) = 0$, y $f(1) = 0$ por hipótesis. Por el teorema de Rolle para algún x en $]0,1[$ se tiene que $0 = f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

b) Tenemos que $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ y $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \le (x - y)^{n-1}$ y $\lim_{y \to x} (x - y)^{n-1} = 0$, porque $n - 1 > 0$. Entonces f' es cero para todos x; por tanto, f es constante.

c) Si $f(x_0) = f(x_1) = 0$ para $x_0 < x_1$ en $[0,1] \Rightarrow f'(x) = 0$ para algún $x \in]x_0, x_1[$ y, por tanto, satisface $0 < x < 1$. Pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, $\therefore$ $f'(x) = 0$ para $x = \pm 1$.

Problema 9-35 *a*) Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$, $x > 0$ y $f(1) = 0$. Pruebe que $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$.

b) Pruebe la siguiente generalización del T.V.M.: Si f es continua y derivable en $]a, b[$ y $\lim_{x \to a^+} f(y)$ y $\lim_{y \to b^-} f(y)$ existen; entonces existe $x \in]a, b[$ tal que $f'(x) = \frac{\lim_{y \to b^-} f(y) - \lim_{y \to a^+} f(y)}{b - a}$.

Solución. *a*) Si $g(x) = f(xy)$, entonces $g'(x) = yf'(xy) = y/xy = 1/x = f'(x)$. Por tanto, existe c tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x > 0$. Además, $f(y) = g(1) = f(1) + c = c$, $\therefore$ $g(x) = f(x) + f(y)$.

b) Es una consecuencia del T.V.M. porque si se define:

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{y \to a^+} f(y), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ \lim_{y \to b^-} f(y), & x = b \end{cases}$$

entonces g es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ y $g' = f'$ para $x \in]a, b[$; por consiguiente, existe $x \in]a, b[$ con $f'(x) = g'(x) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

Problema 9-36 Un tanque cilíndrico tiene su parte superior destapada. El material de la base cuesta el doble que el resto del material. Halle las proporciones más económicas del tanque.

Solución. Sea V su volumen, r el radio, h su altura, c su costo por unidad de la base y C el costo total.

$$V = \pi r^2 h, \quad C = 2\pi rhc + \pi r^2(2c)$$

$$\frac{dV}{dr} = \pi r^2 \frac{dh}{dr} + 2\pi rh = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r}$$

Remplazado este valor en $\frac{dC}{dr} = 2\pi c \left(r \frac{dh}{r} + h \right) + 2\pi c \cdot 2r = 0$ se tiene

$$r\left(-\frac{2h}{r}\right) + h + 2r = 0 \Rightarrow h = 2r$$

Problema 9-37 Una compañía de electricidad ofrece instalar bombillas a un costo de 3 dólares por cada 40 o menos unidades. Pero con el fin de conseguir un contrato mayor y, por tanto, una mayor ganancia de la instalación, la compañía reduce este costo en 5 centavos por cada bombilla si pasan de 40 (45 bombillas costarían 2,75 dólares). ¿Cuál es el número de bombillas que le dejan una ganancia máxima a la compañía?

Solución. Sea x el número de bombillas y y el costo de la instalación.

$$y = x[3 - (x - 40)0{,}05] = -0{,}005x^2 + 5x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -0{,}1x + 5 = 0 \Rightarrow x = 50; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -0{,}1 < 0$$

por tanto, $x = 50$ bombillas es un máximo.

Problema 9-38 Muestre que entre todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, el cuadrado es el de área máxima; entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.

Solución. I. Sean x y y las dimensiones del rectángulo, P el perímetro y A el área. Se tienen las relaciones $2x + 2y = P$ y $A = xy$, de donde $A = \frac{x(P - 2x)}{2} = \frac{Px - 2x^2}{2} \Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{P - 4x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$, de donde $x = P/4$ es un valor crítico. Al remplazar este valor en la primera ecuación se obtiene $y = P/4$; por tanto, el rectángulo es un cuadrado. Este valor crítico es un máximo global, puesto que $\frac{d^2A}{dx^2} = -2$. x está restringida al intervalo $0 < x < P/2$. Observe que los puntos extremos del intervalo no se incluyen, porque para estos valores el área es cero.

Por el método implícito

Si se derivan las relaciones $2x + 2y = P$, $A = xy$ con respecto a x, considerando a y como función de x y A como función de x, se obtiene

$$2 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dA}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

Como P es constante, $\frac{dP}{dx} = 0, \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -1.$

También $\frac{dA}{dx} = 0$, puesto que queremos hallar los máximos locales. Entonces

$$\frac{dA}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Remplazando $\frac{dy}{dx} = -1$ en la última ecuación se obtiene $-x + y = 0$ o $y = x$, lo cual demuestra que el rectangulo es un cuadrado. La prueba de la segunda derivada dice que la condición $y = x$ da un valor máximo porque

$$\frac{dA}{dx} = -x + y \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = -1 + \frac{dy}{dx} = -1 - 1 = -2$$

Para la segunda parte se tienen las relaciones $2x + 2y = P$ y $xy = A$, con A fijo y P variable.

Eliminando y de la segunda ecuación y remplazándola en la primera se obtiene

$$2x + \frac{2A}{x} = P \Rightarrow 2 - \frac{2A}{x^2} = \frac{dP}{dx}$$

Haciendo $\frac{dP}{dx} = 0$ se obtiene $x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$ como valor crítico.

La ecuación $xy = A$ da $y = \sqrt{A}$; por tanto, de nuevo el rectángulo es un cuadrado.

Como la segunda derivada da $\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{4A}{x^3}$ que es positivo, esto muestra que se obtuvo un mínimo. Como se obtuvo solamente un valor crítico en el intervalo, que es un mínimo local, este mínimo es un mínimo global.

II. Derivando las ecuaciones $2x + 2y = P$, $xy = A$ se tiene

$$2 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} = 0; \quad x\frac{dy}{dx} + y = \frac{dA}{dx} = 0$$

de donde se obtiene $x = y$. Para aplicar la prueba de la segunda derivada se debe derivar la ecuación $\frac{dP}{dx} = 2 + 2\frac{dy}{dx}$, de donde

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 2\frac{d^2y}{dx^2}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = -\frac{x(-y/x) - y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}$$

que es positivo; por tanto, $\frac{d^2P}{dx^2} > 0$ y el valor crítico da un mínimo global.

Problema 9-39 Dada una línea recta L y dos puntos A y B del mismo lado de L, halle el punto P sobre L tal que la suma de las distancias $AP + PB$ sea mínima.

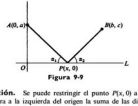


Figura 9-9

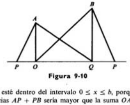


Figura 9-10

Solución. Se puede restringir el punto $P(x, 0)$ a que esté dentro del intervalo $0 \le x \le b$, porque si P estuviera a la izquierda del origen la suma de las distancias $AP + PB$ sería mayor que la suma $OA + OB$ (Figs. 9-9 y 9-10). Análogamente, si P estuviera a la derecha de Q, el pie de la perpendicular a L desde B, entonces $AP + PB > AQ + QB$. No se hará esta rectricción sobre P. Hacemos que x varíe en $-\infty < x < \infty$.

Tenemos que $AP = \sqrt{x^2 + a^2}$ y $PB = \sqrt{(x-b)^2 + c^2}$, por tanto,

$$s = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-b)^2 + c^2}$$

Derivando se tiene $\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(x-b)^2 + c^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{b - x}{\sqrt{(x-b)^2 + c^2}}$ (*)

$$\Leftrightarrow \quad [(x^2 - 2bx + b^2) + c^2] = (x^2 + a^2)(b^2 - 2bx + x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b^2 + c^2)x^2 = x^2(b^2 + a^2) - 2ba^2x + a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (c^2 - a^2)x^2 + 2ba^2x - a^2b^2 = 0$$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{-2ba^2 \pm \sqrt{4b^2a^4 + 4a^2b^2(c^2 - a^2)}}{2(c^2 - a^2)} = \frac{-ba^2 \pm abc}{c^2 - a^2} = \frac{-ba[a \mp c]}{(c-a)(c+a)} = \frac{ba}{c+a} \text{ y } \frac{-ba}{c-a}$$

El valor $-ba/(c-a)$ es extraño y no es solución de la ecuación $\frac{ds}{dx} = 0$; por tanto, el valor crítico es $x = ba/(c + a)$.

Aplicando la prueba de la segunda derivada se tiene

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{[(x-b)^2 + c^2]^{3/2}}$$

que es positiva para todo x; por tanto, el valor crítico da un mínimo local, que es el mínimo global.

Observe que la ecuación (*) dice que $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ o $\alpha_1 = \alpha_2$, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Problema 9-40 Se desea construir un cilindro recto circular de una lámina de metal. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones si se desea que tenga un volumen máximo?

Solución. Las relaciones que se deben considerar son:

$$V = \pi r^2 h; \; S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

S es fijo y V variable. Eliminando h de la segunda ecuación y remplazando su valor en la primera, se obtiene

$$V = \pi r^2 \left(\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{r}{2}(S - 2\pi r^2)$$

Derivando con respecto a r y haciendo la primera derivada igual a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

como $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow h = \dfrac{S - 2\pi \frac{S}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \dfrac{\frac{2}{3}S}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; como $\dfrac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r$ que es negativa; por tanto, el valor crítico da un máximo local.

Como la ecuación $V(r)$ varía en $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$, el valor crítico obtenido es el único en este intervalo; por tanto, es un máximo global. De nuevo se observa que la altura es el doble del radio.

Problema 9-41 Se desea construir una caja rectangular de base cuadrada y de volumen fijo. El costo del material empleado en la base y la parte superior vale a a centavos por centímetro cuadrado, y el de las partes laterales cuesta b centavos el centímetro cuadrado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del prisma para que el costo total sea mínimo?

Solución. Sea y = altura, x = lado de la base. El volumen está dado por $V = x^2 y$. El costo de la base y la cara superior es $2ax^2$, el de los cuatro lados, $4bxy$. El costo total C está dado por

$$C = 2ax^2 + 4bxy$$

Despejando el valor de y en la primera y remplazándola en la segunda, se obtiene

$$C = 2ax^2 + \frac{4bV}{x}$$

Derivando y haciendo la primera derivada igual a cero, se obtiene

$$\frac{dc}{dx} = 4ax - \frac{4bV}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{bV}{a}}$$

que es el único valor crítico. Como $\dfrac{d^2c}{dx^2} = 4a + \dfrac{8bV}{x^3}$ es positiva, el valor crítico corresponde a un mínimo local, y, como es único, a un mínimo global.

Si $x = \sqrt[3]{\dfrac{bV}{a}}$, entonces $y = \dfrac{V}{\left(\frac{bV}{a}\right)^{2/3}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{bV}{a}}$.

Observe que la relación entre las dimensiones y/x es a/b.

Problema 9-42 El costo por hora de un bote es proporcional a la cuarta potencia de su velocidad en el agua tranquila. ¿Cuál es la velocidad más económica para hacerle remontar un río a r kilómetros por hora?

Solución. Sea v la velocidad del bote en el agua tranquila, d la distancia recorrida río arriba en un tiempo t. La velocidad subiendo es $v - r$.

Tenemos la relación $t = \dfrac{d}{v - r}$.

El costo por hora es kv; por tanto, el costo total para t horas está dado por

$$c = kv^4\left(\frac{d}{v - r}\right) = \frac{kdv^4}{v - r}$$

Derivando a c con respecto a v, y recordando que k, d y r son constantes, se obtiene

$$\frac{dc}{dv} = \frac{kd[(v - r)4v^3 - v^4]}{(v - r)^2} = \frac{kdv^3[3v - 4r]}{(v - r)^2} = 0 \Rightarrow v = \frac{4r}{3} \text{ y } v = 0$$

Se desecha el valor $v = 0$, porque en nuestro problema v debe ser mayor que r para que el bote pueda subir el río. El valor de v queda restringido al intervalo $r < v < \infty$. Como

$$\frac{d^2c}{dv^2} = \frac{kd[(v - r)^2(12v^3 - 12v^2r) - 2(3v^4 - 4rv^3)(v - r)]}{(v - r)^4}$$

remplazando $v = 4r/3$, se encuentra que $\dfrac{d^2c}{dv^2} > 0$; por tanto, el valor crítico da un mínimo local, que es el mínimo global por ser único.

Problema 9-43 Halle el punto sobre la parábola $x^2 = 4ay (a > 0)$ que sea el más cercano al punto $(0, c)$.

Solución. El punto fijo está situado sobre el eje de la parábola. Sea (x_1, y_1) cualquier punto sobre la parábola y S su distancia a $(0, c)$.

$$S = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - c)^2} \Rightarrow S^2 = x_1^2 + \left(\frac{x_1^2}{4a} - c\right)^2$$

como $x_1^2 = 4ay_1$. Derivando a S^2 con respecto a x_1 y haciendo la derivada igual a cero (S es un mínimo si S^2 lo es, puesto que $S > 0$) se tiene

$$\frac{d(S^2)}{dx_1} = 2x_1 + 2\left(\frac{x_1^2}{4a} - c\right) \cdot \frac{2x_1}{4a} = 0$$

Los valores críticos son

$$x_1 = 0 \text{ y } x_1 = \pm\sqrt{4ca - 8a^2} \tag{1}$$

y los valores correspondientes de y son $y_1 = 0$ y $y_1 = c - 2a$.

$$\therefore \quad \frac{d^2(S^2)}{dx_1^2} = 2 + \frac{3x_1^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \tag{2}$$

Para $x_1 = 0$ se tiene $\dfrac{d^2(S^2)}{dx_1^2} = 2 - \dfrac{c}{a}$, que es positivo cuando $c < 2a$ y negativo cuando $c > 2a$. Entonces $x_1 = 0$ es un mínimo local para $c < 2a$ y máximo local para $c > 2a$.

Para $x_1 = \pm\sqrt{4ca - 8a^2}$, c debe ser mayor que $2a$ y se halla $\dfrac{d^2(S^2)}{dx_1^2} = \dfrac{2c}{a} - 4$, que es positivo para $c > 2a$; por tanto, se tiene un mínimo local para $c > 2a$.

En resumen, para $c < 2a$, el origen da un mínimo local, y, como es único, es un mínimo global.

Para $c > 2a$, el origen da un máximo local, mientras que $x_1 = \pm\sqrt{4ca - 8a^2}$ da dos mínimos locales; ambos son mínimos globales, puesto que los valores correspondientes S^2 son iguales para los dos valores de x_1 y $S^2 \to \infty$ si $x_1 \to \pm\infty$.

Para $c = 2a$, la ecuación (1) muestra que los valores críticos son

$$x_1 = 0 \text{ y (2) da: } \frac{d^2(S^2)}{dx_1^2} = \frac{3x_1^2}{4a^2} = 0$$

para $c = 2a$, que es positivo en cualquier lado de $x_1 = 0$; por tanto, tenemos un mínimo global en este caso.

Problema 9-44 Dos carreteras se cruzan en ángulo recto. El automóvil A está situado en P a S kilómetros de la intersección sobre una de las carreteras; el automóvil B está situado sobre la otra carretera a Q kilómetros de la intersección. Parten simultáneamente y se dirigen hacia la intersección a una velocidad de R y r kilómetros por hora. Después de haber partido, ¿cuál es la distancia mínima que los separa?

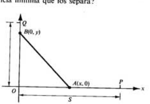


Figura 9-11

Solución. *a)* Sea z la distancia que los separa en un tiempo t. Se tiene

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

El automóvil A, en un tiempo t, ha recorrido $S - x$ y B, $s - y$. Por tanto,

$$\frac{s - y}{r} = \frac{S - x}{R} = t \tag{2}$$

Despejando de esta última ecuación y y remplazando su valor en la primera, se tiene

$$x^2 + \left[\frac{Rs - r(S - r)}{R}\right]^2 = z^2 \tag{3}$$

Derivando con respecto a x y haciendo la primera derivada igual a cero se tiene

$$\frac{d(z^2)}{dx} = 2x + 2\left[\frac{Rs - r(S - x)}{R}\right] \cdot \frac{x}{R} = 0 \Leftrightarrow R^2x + rRs - r^2S + r^2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (R^2 + r^2)x = r^2S - rRs = r(rS - Rs) \Rightarrow x = \frac{r(rS - Rs)}{R^2 + r^2} \tag{4}$$

que es el valor crítico. De (4), $\frac{d^2(z^2)}{dx^2} = 2 + \frac{2r^2}{R^2}$, que es positivo, como el valor crítico es único, se tiene un mínimo global.

De (2) se tiene

$$y = \frac{R(Rs - rS)}{R^2 + r^2}$$

El tiempo t empleado para llegar a la posición crítica está dado por

$$t = \frac{s - y}{r} \quad \text{o} \quad t = \frac{s - x}{R}$$

Por tanto, la solución del problema es $t = \dfrac{SR + sr}{R^2 + r^2}$.

b) Expresando a x y y en términos de t, según la ecuación (2),

$$x = S - Rt \quad \text{y} \quad y = s - rt$$

Remplazando en (1) se tiene

$$(S - Rt)^2 + (s - rt)^2 = z^2$$

Derivando con respecto a t y haciendo la derivada igual a cero, tenemos

$$2(S - Rt)(-R) + 2(s - rt)(-r) = \frac{d(z^2)}{dt} = 0 \Leftrightarrow -R(S - Rt) - r(s - rt) = 0 \Rightarrow t = \frac{rs + RS}{R^2 + r^2}$$

que es el único valor crítico. Como $\frac{d^2(z^2)}{dt^2} = 2(R^2 + r^2)$, que es positivo, da un mínimo global.

c) Derivando (1) con respecto a t, implícitamente para minimizar z^2, se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = \frac{d(z^2)}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = -R, \quad \frac{dy}{dt} = -r \tag{5}$$

y como x y y son decrecientes con el tiempo en el sistema de coordenadas, remplazando estos valores en la ecuación (5) y haciendo $\frac{d(z^2)}{dt} = 0$, se obtiene

$$x = -\frac{ry}{R}$$

Remplazando este valor para x en (2), se encuentra que

$$y = \frac{R(Rs - rS)}{R^2 + r^2}, \quad x = \frac{r(rS - Rs)}{R^2 + r^2}, \quad t = \frac{rs + RS}{R^2 + r^2}$$

Es interesante observar que los signos de x y y son en general opuestos; por tanto, la intersección es alcanzada por uno de los automóviles antes de que se obtenga la distancia mínima. El caso excepcional se presenta cuando $rS - Rs = 0$, pues los dos automóviles llegan a la intersección simultáneamente; por tanto, la distancia mínima en este caso es cero.

Problema 9-45 Dada la parábola $y^2 = 2px$, $p > 0$ y un punto $P(\xi, \eta)$ en ella ($\eta^2 < 2p\xi$), halle el camino más corto (formado por dos segmentos) que conducen de un punto P a un punto Q sobre la parábola y después al foco de la parábola $F\left(\frac{1}{2}p, 0\right)$. Muestre qué ángulo FQP queda bisecado por la normal a la parábola y que QP es paralelo al eje de la parábola (principio del espejo parabólico).

Solución. La distancia total es

$$d(y) = \left[\left(\frac{y^2}{2p} - \xi\right)^2 + (y - \eta)^2\right]^{1/2} + \left[\left(\frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right]^{1/2} =$$
$$= \left[\left(\frac{y^2}{2p} - \xi\right)^2 + (y - \eta)^2\right]^{1/2} + \left[\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}\right]$$

Para que sea mínima, $d'(y) = \dfrac{\frac{y}{p}\left(\frac{y^2}{2p} - \xi\right) + y - \eta}{\left[\left(\frac{y^2}{2p} - \xi\right)^2 + (y - \eta)^2\right]^{1/2}} + \dfrac{y}{p} = 0.$

La ecuación la satisface $y = \eta$. (Vea Fig. 9-12.)

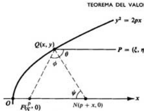


Figura 9-12

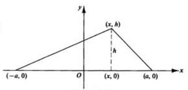


Figura 9-13

Sean θ y ϕ los ángulos formados por los segmentos PQ y FQ, respectivamente, con la normal QN a la parábola. Observe que

$$d'(y) = \frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{p}(-\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\phi)$$

Así, en un mínimo, $\theta = \phi$.

Además, se verifica con facilidad que el triángulo QFN es isósceles; $QF = FN = x + p/2$, por tanto, $\psi = \theta$ y PQ es de nuevo paralelo al eje X.

Problema 9-46 Entre todos los triángulos de base y área dada, halle el de menor perímetro.

Solución. Si C es el vértice del triángulo, h su altura (fijada por el área y la base) y (x, h) son las coordenadas del vértice, entonces la suma de los lados AC y BC está dada por

$$f(x) = \sqrt{(x + a)^2 + h^2} + \sqrt{(x - a)^2 + h^2}$$

con $2a$ igual a la longitud de la base. De donde obtenemos

$$f'(x) = \frac{x + a}{\sqrt{(x + a)^2 + h^2}} + \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + h^2}} \tag{1}$$

$$f''(x) = \frac{h^2}{\sqrt{[(x + a)^2 + h^2]^3}} + \frac{h^2}{\sqrt{[(x - a)^2 + h^2]^3}} \tag{2}$$

De (1) vemos que $f'(0) = 0$ y de (2) que $f''(x)$ es siempre positiva; entonces en $x = 0$ existe un mínimo local. Este valor mínimo está dado por el triángulo isósceles. (Vea Fig. 9-13.)

Análogamente, se halla que de todos los triángulos con perímetro y base dada el triángulo isósceles tiene área máxima.

Problema 9-47 Entre todos los triángulos de base y vértice dado el triángulo isósceles tiene área máxima.

Solución. Sea a la base; x, y, los lados del triángulo, y α, β, γ, los ángulos opuestos correspondientes. Por la ley de los senos se tiene

$$x = \frac{a\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}, \quad y = \frac{a\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$$

Entonces el área está dada por

$$A = \frac{1}{2}xy\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}a^2\frac{\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{2}\frac{a^2\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,\alpha}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

La derivada con respecto a β es $A' = a^2\,\text{sen}\,(2\beta + \alpha)/2\,\text{sen}\,\alpha$.

De $A' = 0$ se tiene $\beta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, un mínimo local, y, por tanto, que el triángulo es isósceles.

Problema 9-48 . Entre todos los triángulos de base y área dadas el triángulo isósceles tiene el máximo ángulo en el vértice.

Solución. Si la base y el área son fijas, entonces la altura también es fija.
Sean $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ los puntos extremos de la base, y (x, h) el vértice. Si θ es el ángulo del vértice, entonces

$$\cos\theta = \frac{h^2 + x^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^2 + 2h^2(a^2 + x^2) + h^4}}$$

Derivando se obtiene

$$-\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dx} =$$

$$= \frac{2x\{\sqrt{(a^2 - x^2)^2 + 2h^2(a^2 + x^2) + h^2} - (x^2 + h^2 - a^2)^2[(a^2 - x^2)^2 + 2h^2(a^2 + x^2) + h^2]^{-1/2}\}}{(a^2 + x^2)^2 + 2h^2(a^2 + x^2) + h^2}$$

haciendo $\frac{d\theta}{dx} = 0$ se obtiene $x = 0$; por tanto, el triángulo es isósceles.

Problema 9-49 Muestre que entre todos los triángulos de área dada el triángulo equilátero tiene el perímetro mínimo.

Solución. Se tienen en cuenta los resultados del Problema 9-46. Sea T el triángulo del área dada y perímetro mínimo y b uno de sus lados. Si se hace a b fijo, T debe ser un triángulo de base b y área dada que tiene el perímetro mínimo. Entonces T debe ser isósceles y los dos lados de T distintos de b iguales entre sí. Pero b es cualquier lado, y T es, por tanto, equilátero.

Problema 9-50 Muestre que entre todos los triángulos de perímetro dado el triángulo equilátero tiene área máxima.

Solución. Primero muestre que de todos los triángulos de perímetro y base dada el triángulo isósceles es el de área máxima. Para este fin, emplee la notación del Problema 9-46; sea u la longitud del lado que une los vértices $(-a, 0)$ y (x, h) y v la longitud del lado $(a, 0)$, (x, h). La longitud $u + v = 2b$ es fija y

$$A = ah = a\sqrt{v^2 - (a - x)^2} = a\sqrt{u^2 - (a + x)^2}$$

Eliminando u y v se obtiene

$$A = a\sqrt{(b^2 - a^2)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)}$$

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra que en $x = 0$ tiene un máximo global, puesto que

$A'' = \dfrac{-\frac{a}{b}(b^2 - a^2)^2}{\left[(b^2 - a^2)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}} < 0$. Si T es un triángulo de área máxima para un perímetro fijo, entonces T debe ser equilátero, porque si es de base b, empleando el argumento del problema anterior, los otros dos lados deben ser iguales. Como b es un lado cualquiera el triángulo es equilátero.

Problema 9-51 Muestre que entre todos los triángulos inscritos en un círculo el triángulo equilátero es el de área máxima.

Solución. Dada una base fija los triángulos inscritos en un círculo tienen el ángulo sobre la vertical constante. Aplicando los resultados del Problema 9-47 queda demostrado.

Problema 9-52 Halle los puntos de la elipse que estén más cercanos a un punto dado sobre su eje mayor.

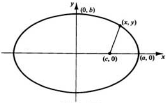


Figura 9-14

Solución. Sea la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(b < a)$, y $(c, 0)$ el punto dado sobre el eje mayor. (Vea Fig. 9-14.)

La distancia entre cualquier punto (x, y) sobre la elipse al punto $(c, 0)$ es

$$d = \sqrt{(x - c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, \quad -a \le x \le a$$

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra que el único punto crítico es $x = \frac{c}{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$. Como $f'' > 0$, se tiene un mínimo global. Si el punto está sobre el dominio de d, es un mínimo local; si no, el mínimo de d corresponde al punto extremo del eje mayor que esté más cercano a c.

Para la distancia mínima se hallan los valores

$$d = b\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{si } |c| \le a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$d = a - |c| \quad \text{si } |c| \ge a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Problema 9-53 Demuestre la siguiente desigualdad: $\operatorname{tg} x \ge x$ para todo x en $0 \le x < \frac{\pi}{x}$.

Solución. Sea $y = \operatorname{tg} x$. Por el teorema del valor medio se tiene que $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0 = (x - 0)\sec^2 x$ con x interior al intervalo $0 < x_1 < x$; $\sec^2 x > 1$; por tanto, $\operatorname{tg} x > x$ para todo x en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Se incluye el punto extremo de la izquierda del intervalo porque $\operatorname{tg} 0 = 0$; se tiene que $\operatorname{tg} x \ge x$ para todo x en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Problema 9-54 Pruebe la siguiente desigualdad: $1 \ge \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$. Para todo x en $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Solución. Considere la función $y = x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $y' = 1 - \cos x = 0$ tiene por solución $x = 0$, el extremo izquierdo del intervalo. No existen puntos críticos en el interior del intervalo; por tanto, el valor mínimo se presenta en uno de los extremos. Para el extremo izquierdo se tiene $y = 0$ y

para el extremo de la derecha $y = \frac{\pi}{2} - 1$; por tanto, el mínimo se presenta en $x = 0$. Entonces $x - \text{sen}\, x > 0$ o $x > \text{sen}\, x$ o $\text{sen}\, x/x < 1$ para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Si se incluye el extremo izquierdo del intervalo, entonces se tiene

$$\frac{\text{sen}\, x}{x} \leq 1 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Ahora considere la función $y = \text{sen}\, x - \frac{2x}{\pi}$, $\frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{2}{\pi}$.

El valor crítico es el x, que satisface la ecuación $\cos x - \frac{2}{\pi} = 0$; sin embargo, como y'' es negativo para este valor crítico debe dar un máximo local; por tanto, el mínimo se debe alcanzar en uno de los extremos. Para $x = 0$ se tiene $y = 0$ y para $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene $\text{sen}\, x - \frac{2x}{\pi} \geq 0$ o $\frac{\text{sen}\, x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, o sea, que $1 \geq \frac{\text{sen}\, x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Problema 9-55 *a*) Halle el valor mínimo de $\dfrac{\frac{a_1 + x}{2}}{\sqrt{a_1 x}}$ con $a_1 > 0$ y $x > 0$.

b) Halle el valor mínimo de $\dfrac{\frac{a_1 + a_2 + x}{3}}{\sqrt[3]{a_1 a_2 x}}$ con $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $x > 0$.

c) Halle el valor mínimo de $\dfrac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2, \ldots, a_{n-1} \cdot x}}$ con $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, x > 0$.

Solución. *a*) Sea $y = \dfrac{\frac{a_1 + x}{2}}{\sqrt{a_1 x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a_1}}\left(\dfrac{a_1 + x}{x^{1/2}}\right)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a_1}}\left[\frac{x^{1/2} - (a_1 + x)\frac{1}{2}x^{-1/2}}{x}\right]$$

Si $y' = 0$, entonces $x = a_1$ es el único valor crítico.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4\sqrt{a_1}}\left[\frac{x^{3/2} - x + a_1}{x^3}\right] \Rightarrow y''(a_1) = \frac{1}{4a_1^2} > 0$$

por tanto, se tiene un mínimo global. Para el valor mínimo de y se tiene

$$\frac{a_1 + a_1}{2\sqrt{a_1 + a_1}} = 1$$

Para cualquier x positivo, digamos a_2, se tiene

$$\frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{\sqrt{a_1 a_2}} \geq 1 \text{ o } \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

el signo de igualdad se verifica solamente cuando $a_2 = a_1$.

b) Sea $y = \dfrac{\frac{a_1 + a_2 + x}{3}}{\sqrt[3]{a_1 a_2 x}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{a_1 a_2 x}}\left(\dfrac{a_1 + a_2 + x}{x^{1/3}}\right) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{a_1 a_2}}\left[\dfrac{x^{1/3} - (a_1 + a_2 + x)\frac{1}{3}x^{-1/3}}{x^{2/3}}\right]$

Al hacer $y' = 0$ se encuentra que el único valor crítico es $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$, el cual da un mínimo global porque

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{9\sqrt[3]{a_1a_2}}\left[\frac{2 + a_1x^{2/3} + a_2x^{2/3}}{x^{4/3}}\right] \Rightarrow y''\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) = \frac{2}{9\sqrt[3]{a_1a_2}}\left[\frac{2 + a_1\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{2/3} + a_2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{4/3}}\right] > 0$$

El valor mínimo de y está dado por

$$\frac{\frac{1}{3}\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 + a_2}{2}\right)}{\sqrt[3]{a_1a_2}\sqrt[3]{\frac{a_1 + a_2}{2}}} = \frac{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^{2/3}}{(a_1a_2)^{1/3}} = \left[\frac{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2}{a_1a_2}\right]^{1/3}$$

El último término es ≥ 1 por la parte *a*). Entonces el valor mínimo de y es 1 y, por tanto, para cualquier x positivo $x = a_3$ se tiene

$$\frac{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

la igualdad se verifica solamente si $a_3 = a_2 = a_1$.

c) Sea $y = \dfrac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}x}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}}}\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{x^{1/n}}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}}}\left[\frac{x^{1/n} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x)\frac{1}{n}x^{1/n-1}}{x^{2/n}}\right]$$

Haciendo $y' = 0$ se encuentra que el único valor crítico es

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

El valor mínimo de y está dado por

$$y = \frac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n}}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3, \ldots, a_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}}} = \frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3, \ldots, a_{n-1}}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}}{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}}\right]^{1/n}$$

Por tanto, para cualquier x positivo, digamos $x = a_n$, se tiene

$$\frac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_n}} \geq \left[\frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}}{a_1a_2, \ldots, a_{n-1}}\right]^{1/n} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_n} \quad (1)$$

El signo de igualdad es válido si, y solamente si, $a_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$.

Para que podamos concluir que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2, \ldots, a_n}$$

para lo cual se tiene el signo de igualdad, solamente cuando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ debemos usar el principio de inducción.

La desigualdad se verifica para 1, porque $\frac{a_1}{1} \geq a_1$.

Suponga que la proposición se verifica para $n = k - 1$, es decir,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}} \tag{1}$$

la igualdad se verifica solamente en el caso de que $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1}$.

Elevando ambos lados de la desigualdad a la potencia $(k - 1)$ y dividiendo por el término de la derecha se tiene

$$\frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}}{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}} \geq 1 \tag{2}$$

Combinando las desigualdades (1) y (2) se obtiene

$$\frac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}}{\sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k}} \geq \left[\frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}}{a_1 a_2, \ldots, a_{k-1}}\right] \geq 1$$

en la cual se ha remplazado n por k y, por tanto,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2, \ldots, a_k}$$

la igualdad se verifica solamente cuando

$$a_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1} = a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1}$$

Esta es la fórmula para $n = k$.

Problema 9-56 Halle el valor de x para el cual la función $y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2$ tiene un mínimo, con $a_1, a_2, \ldots, a_n$, números reales fijos.

Solución. La derivada es $y' = -2(a_1 - x) - 2(a_2 - x) - \ldots - 2(a_n - x)$. Haciendo la derivada igual a cero se obtiene el valor crítico $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Como $\frac{d^2y}{dx^2} = 2n > 0$, el valor crítico da un mínimo local, y, como es único, es un mínimo global. (Importante en estadística.)

Problema 9-57 Minimice: *a)* $\sum_{i=1}^{n} |a_i - x|$; *b)* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i - x|$ con $\lambda_i > 0$.

Solución. *a)* Supongamos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Observe que $|a_n - x| + |a_1 - x| \geq a_n - a_1$ y toma el valor $a_n - a_1$ cuando $a_1 \leq x \leq a_n$.

Si n es par, $n = 2m$, el mínimo se presenta cuando $a_m \leq x \leq a_{m+1}$ y tiene por valor a

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2m} - a_1 - a_2 - \ldots - a_m$$

y si n es impar, $n = 2m - 1$, entonces el mínimo se presenta cuando $x = a_m$ y tiene por valor a

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2m-1} - a_1 - a_2 - \ldots - a_{m-1}$$

El valor de x que da el mínimo, en estadística se llama la media de los a_i.

b) Sin perder generalidad se puede suponer que la función $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i - x|$ es lineal por trozos y su derivada es

$$f'(x) = \tau_\alpha = \lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+1} + \dots + \lambda_n - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_{\alpha-1} \quad \text{con } a_{\alpha-1} < x < a_\alpha$$

que es constante por secciones cuando $a_{\alpha-1} < x < a_\alpha$. Existe un valor α tal que $\tau_\alpha \geq 0$ y $\tau_{\alpha+1} < 0$. Si $\tau_\alpha = 0$, entonces $a_{\alpha-1} \leq x \leq a_\alpha$ da el mínimo. Si $\tau_\alpha > 0$, entonces $x = a_\alpha$ da el mínimo.

Problema 9-58 Un barco *S* ancla *d* millas fuera de la playa (Fig. 9-15). Sea *A* un punto sobre la playa que sea el más cercano al barco y *B* un punto sobre la playa distante *b* millas de *A*. Un hombre sube al barco y desea llegar al punto *B* en el menor tiempo posible. Si puede remar *r* millas por hora y caminar *w* millas por hora, ¿a qué punto *P* de la playa se debe dirigir?

Solución. Es evidente que el punto *P* debe estar entre *A* y *B* o en *A* o *B*. Si *P* está a la izquierda de *A*, el hombre acortaría su tiempo, simplemente dirigiéndose a *A*. Si está a la derecha de *A*, él acortaría su tiempo dirigiéndose a *B*. Entonces *P* está entre $0 \leq x \leq b$, siendo *x* la abscisa de *P*.

El tiempo que emplea en remar de *S* a *P* es $\frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{r}$ y el tiempo que emplea en caminar de *P* a *B* es $\frac{b - x}{\omega}$. Por tanto, el tiempo total es $T = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{r} + \frac{b - x}{\omega}$.

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se obtiene

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{r\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{1}{\omega} = 0$$

Elevando al cuadrado y resolviendo para *x* se obtiene

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{r}{\omega} = \lambda \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\lambda^2 d^2}{1 - \lambda^2}} = \frac{\lambda d}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \qquad (1)$$

que es el único valor crítico. Como $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d^2}{r^2(x^2 + d^2)^{3/2}}$ es positiva en todo el intervalo.

La ecuación (1) muestra que si $\lambda \geq 1$ no existe valor crítico en el intervalo dado; por tanto, el valor extremo se presenta en un punto extremo. Si $\lambda = 1$, el valor mínimo se presenta si el hombre rema hacia *B*. Se llega a la misma conclusión observando que *T* decrece en el intervalo porque $\frac{dT}{dx}$ es negativa en $x = 0$ y no existe punto crítico dentro del intervalo. Ahora, si $\lambda < 1$, el valor de *x* está dado por (1). Entonces, si $\frac{\lambda d}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \leq b$, el valor de *x* está dado por (1), que da el tiempo mínimo. Si $\lambda d/\sqrt{1 - \lambda^2} > b$, entonces el valor de *x* que da el tiempo mínimo es $x = b$, el punto extremo de la derecha del intervalo, como en el caso $\lambda \geq 1$.

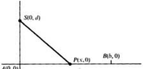


Figura 9-15

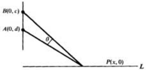


Figura 9-16

Problema 9-59 Se da un segmento de recta AB y una recta L perpendicular a él, pero que no lo corta. Halle el punto P sobre L tal que el segmento AB forme el mayor ángulo en P.

Solución. Sea θ el ángulo formado por AB en P; y $(0, d)$ y $(0, c)$ las coordenadas de A y B y $(x, 0)$ las de P.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\dfrac{d}{x} + \dfrac{c}{x}}{1 + \dfrac{d}{x}\,\dfrac{c}{x}} = \frac{x(c-d)}{x^2 + cd}$$

La Figura 9-16 muestra que θ es menor de 90°. Por tanto, hallaremos el máximo de $\operatorname{tg}\theta$ en vez del máximo de θ, porque la posición de P que hace a $\operatorname{tg}\theta$ máxima hace que θ sea la máxima, debido a que $\operatorname{tg}\theta$ crece al crecer θ en $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra que

$$\frac{d\operatorname{tg}\theta}{dx} = \frac{(x^2 + cd - 2x^2)(c-d)}{(x^2+cd)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{cd}$$

La segunda derivada da $\dfrac{d^2(\operatorname{tg}\theta)}{dx^2} = \dfrac{[(x^2+cd)^2(-2x) - 4cx(cd-x^2)(x^2+cd)](c-d)}{(x^2+cd)^4}$ y para $x = \sqrt{cd}$,

$$\frac{d^2(\operatorname{tg}\theta)}{dx^2} = \frac{-2\sqrt{cd}\,(c-d)}{4(cd)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{c-d}{(cd)^{3/2}} < 0$$

que es negativa; por tanto, el valor crítico $x = \sqrt{dc}$ da un máximo local para $\operatorname{tg}\theta$ y, por tanto, para θ. Si x es negativo, el valor de $\operatorname{tg}\theta$ es negativo; por tanto, el valor crítico $x + -\sqrt{cd}$ da un mínimo local para $\operatorname{tg}\theta$.

Por tanto, consideramos $\operatorname{tg}\theta$ definida solamente para x en $0 \le x < \infty$. En este intervalo se tiene solamente un valor crítico, que da un máximo local y, como es único, es un máximo global.

Problema 9-60 Dados dos puntos A y B sobre los lados opuestos de una recta L (Fig. 9-17), halle un punto P sobre L de tal manera que el tiempo empleado para ir de A a P y de P a B en línea recta sea mínimo, suponiendo que la velocidad en la parte superior es v_1 y en la inferior v_2.

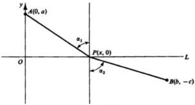


Figura 9-17

Solución. Sea $(x, 0)$, $(0, a)$ y $(b, -c)$ las coordenadas de P, A y B, respectivamente; la relación que da el tiempo total es

$$T = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-b)^2+c^2}}{v_2} \tag{1}$$

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra que

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-b}{v_2\sqrt{(x-b)^2+c^2}} = 0 \; ; \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{a^2}{v_1(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_2[(x-b)^2+c^2]^{3/2}} > 0 \quad (2)$$

Además

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{sen}\alpha_1 \text{ y } \frac{b-x}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}} = \operatorname{sen}\alpha_2$$

con α_1 y α_2 los ángulos formados por las rectas AP y PB con la perpendicular a L en P.

Entonces la ecuación (2) da la condición

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (3)$$

El punto P se puede restringir al intervalo $0 \le x \le b$ por las razones dadas, y, por tanto, las expresiones para T son las correctas.

La ecuación (2) no se puede resolver para x, pero usando el hecho de que $\frac{d^2T}{dx^2} > 0$ en todas partes y como $\frac{dT}{dx}$ es positivo en $x = b$ y negativo en $x = 0$, y como existe un único valor crítico, el mínimo obtenido es un mínimo global.

Este problema está relacionado con la ley de Snell, en óptica, que dice: «Un rayo de luz que pasa el medio A con velocidad v_1 al medio B con velocidad v_2 seguirá la trayectoria APB tal que $\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$.»

Problema 9-61 Un alambre de longitud L se va a cortar en dos partes, una de ellas se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un círculo. ¿Cuál debe ser la longitud de cada parte si la suma de las áreas es mínima?

Solución. Sea x el lado del cuadrado, r el radio del círculo y A el área total. Entonces

$$L = 4x + 2\pi r \quad (1)$$

y

$$A = x^2 + \pi r^2 \quad (2)$$

De (1) se obtiene $x = \frac{L - 2\pi r}{4}$. Remplazando este valor en (2) se obtiene

$$A = \frac{L^2 - 4\pi rL + 4\pi^2 r^2}{16} + \pi r^2 \quad (3)$$

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-4\pi L + 8\pi^2 r}{16} + 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi + 8}$$

Al remplazar el valor de x en (1) se tiene

$$x = \frac{L}{\pi + 4}$$

Ahora $\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{8\pi^2}{16} + 2\pi > 0$ y, como el valor crítico es único, se obtiene un mínimo global.

Problema 9-62 Las ecuaciones del movimiento de un proyectil están dadas por $x = (v_0 \cos\alpha)t$ y $y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - 16t^2$, con v_0 la velocidad inicial, α el ángulo de elevación del cañón, t el tiempo en segundos y x y y las coordenadas del proyectil. Halle la altura máxima que alcanza el proyectil y muestre que el mayor alcance se obtiene cuando el ángulo de elevación es de 45°. (Vea Fig. 9-18.)

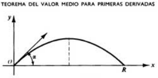


Figura 9-18

Solución. De las ecuaciones del movimiento se encuentra que

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \text{ y } \frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen}\alpha - 32t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha - 32t}{v_0 \cos\alpha}$$

Haciendo $y' = 0$, el valor crítico está dado por

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - 32t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{32}$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{32}{v_0^2(\cos\alpha)^2}$ es negativa; por tanto, el valor crítico corresponde a un máximo local, y, como es único, a un máximo global.

El valor de y correspondiente al valor crítico es

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{32} - 16\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{32}\right)^2 = \frac{(v_0 \operatorname{sen}\alpha)^2}{64}$$

que es la máxima altura alcanzada por el proyectil.

Sea r el alcance. Es igual al valor de x correspondiente al tiempo $t \neq 0$ para el cual $y = 0$. De $y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - 16t^2$ se encuentra $y = 0$ para $t = v_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{16}$; por tanto, el alcance está dado por

$$r = (v_0 \cos\alpha)\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{16} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{16} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{8}$$

Derivando y haciendo la derivada igual a cero se encuentra que

$$\frac{dr}{d\alpha} = v_0^2 \frac{\cos 2\alpha}{4} = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$$

como el valor crítico.

Como $\dfrac{d^2r}{d\alpha^2} = -\dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2}$ es negativa para este valor crítico, corresponde a un máximo global.

Problema 9-63 *a)* Halle un punto tal que la distancia a los tres lados de un triángulo sea mínima. *b)* Halle el punto para el cual la suma de las distancias a los vértices sea mínima.

Solución. *a)* Supongamos que los vértices del triángulo están localizados en $P(a, b)$, $Q(-c, 0)$ y $R(c, 0)$ con $b > 0$ y $c > 0$. Además, $a \geq 0$. (Si $a < 0$ remplazamos el triángulo por su reflexión sobre el eje Y.) Para cualquier punto (x, y) hagamos $p = y$:

$$q = \frac{bx - (a - c)y - bc}{\sqrt{b^2 + (a - c)^2}}, \quad r = \frac{bx - (a + c)y + bc}{\sqrt{b^2 + (a + c)^2}}$$

con p, q y r las distancias dirigidas desde los lados QR, RP y PQ, con signos positivos si (x, y) está por encima, a la izquierda y a la derecha de los respectivos lados. Restringimos (x, y) a una recta paralela a la base, $y =$ constante. Sobre esta recta minimizamos $f(x) = |p| + |q| + |r|$. Observe que sobre la recta $y = b$ el mínimo se presenta en P, y si $y > b$ el valor del mínimo debe ser mayor. Es, por tanto, necesario considerar $y \leq b$.

Se tiene $f'(x) = \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (a+c)^2}}$ signo $r + \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + (a-c)^2}}$ signo q.

Entonces el mínimo sobre la recta $y =$ constante se presenta sobre la recta RP, es decir, $|q| = 0$. El valor del mínimo es

$$g(y) = y + 2c\frac{b - y}{\sqrt{b^2 + (a+c)^2}}$$

Si el lado RP es mayor que la base QR, el mínimo se debe presentar en el vértice R. Si el lado RP es menor que la base, el mínimo se presenta en el vértice P.

Así el mínimo está sobre el vértice opuesto al lado mayor del triángulo. Si los dos lados mayores son iguales, entonces el mínimo se obtiene en cualquier punto del lado más corto. Si el triángulo es equilátero, el mínimo se obtiene en cualquier punto dentro o sobre el triángulo.

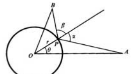


Figura 9-19

b) Supongamos los vértices localizados en los puntos 0, $A = (a, 0)$, $B = (b\cos\theta, b \operatorname{sen}\theta)$.

Minimizamos las distancias desde un punto P situado sobre el círculo de radio r y centro O. La suma de las distancias de P a los vértices está dada en función del ángulo θ, inclinación de OP, como sigue:

$$f(\phi) = r + \sqrt{(r\cos\phi - a)^2 + (r \operatorname{sen}\phi)^2} + \sqrt{(r\cos\phi - b\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}\theta)^2}$$

de donde

$$f'(\phi) = \frac{ar\operatorname{sen}\phi}{|PA|} - \frac{br\operatorname{sen}(\theta - \phi)}{|PB|}$$

Si P está dentro del triángulo, entonces, por la ley de los senos (Fig. 9-19), se obtiene

$$f'(\phi) = r(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)$$

y la condición para que exista un mínimo sobre el círculo es que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$.

Si P da el mínimo pedido, el ángulo formado por dos de los vértices y P queda bisectado por la recta que une a P y el tercer vértice. Entonces los ángulos que determinan las rectas que pasan por los vértices y P son iguales a $2\pi/3$.

Si cualquiera de los ángulos en los vértices A, B o C es igual o mayor que $2\pi/3$, entonces no existe un mínimo interior. Por tanto, suponga que $C \leq 2\pi/3$. El punto mínimo P no puede ser interior al triángulo. Además, no puede estar en el lado de AB opuesto a C, porque un valor menor estaría dado por su imagen en AC. Si $d = |PC| > 0$, la recta PC debe ser exterior al ángulo formado por AB en P. La única posibilidad que queda es que $d = 0$ o el punto mínimo es C.

Problema 9-64 Se desea construir un recipiente que sea un cilindro recto circular para que contenga un galón de aceite. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que se gaste un mínimo de material?

Solución. El volumen y el área lateral del cilindro son, respectivamente, $V = \pi r^2 h$ y $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Como el volumen es constante, $dV/dt = 0$. Derivando con respecto a r se obtiene

$$\frac{dV}{dr} = \pi\left(r^2\frac{dh}{dr} + 2rh\right) = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \tag{1}$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi\left(2r + r\frac{dh}{dr} + h\right) = 2\pi(2r - h) \tag{2}$$

Si $dA/dr = 0 \Leftrightarrow 2r = h$ y remplazando este valor en $V = r^2h$ se obtiene $V = \pi r^2 h = 2\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Como $\frac{d^2A}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right) = 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right) > 0$, entonces para $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ hay un mínimo.

Problema 9-65 Un alambre de longitud L se corta en dos partes, una se dobla para que forme un círculo y la otra para que forme un cuadrado. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas encerradas por las dos partes sea máxima?

Solución. La suma de las áreas combinadas es: (1) $A = \pi r^2 + x^2$ y (2) $L = 2\pi r + 4x$.

Derivando con respecto a r se obtiene:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2x\frac{dx}{dr} \quad 0 \leq 2\pi r \leq L$$

$$\frac{dL}{dr} = 2\pi + 4\frac{dx}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dr} = -\frac{\pi}{2},\ \frac{dL}{dr} = 0,\ L = \text{constante}$$

Remplazando el valor de dx/dr en dA/dr se obtiene $dA/dr = \pi(2r - x)$. Además,

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \pi\left(2 - \frac{dx}{dr}\right) = \pi\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

entonces la curva que representa a A es cóncava hacia arriba. $dA/dr = 0 \Leftrightarrow 2r = x$, entonces $L = 2\pi r + 8r = (2\pi + 8)r$. Entonces $dA/dr = 0$ cuando $x = \frac{L}{2\pi + 8}$, $x = \frac{L}{\pi + 4}$. Como $\frac{d^2A}{dx^2} > 0$, $r = \frac{L}{2\pi + 8}$ da un mínimo para A. Pero el problema pide un máximo para A.

Como r está limitada al intervalo $0 \leq r \leq \frac{L}{2\pi}$, examinemos los valores de r en los extremos del intervalo. Cuando $r = 0$: $x = L/4$, $A = \frac{L^2}{16}$; cuando $r = L/2\pi$, $x = 0$, $A = \frac{L^2}{4\pi}$.

En el mínimo $r = \frac{L}{2(\pi + 4)}$, $x = \frac{L}{\pi + 4}$, $A = \frac{L^2}{4\pi + 16}$.

El grafo muestra que el máximo de A está en $r = \frac{L}{2\pi}$, lo cual quiere decir que el alambre no se debe cortar, sino que todo debe ser doblado en un círculo de área total máxima. Si se adopta desde el punto de vista de que el alambre debe ser cortado, no existe respuesta.

Problema 9-66 ¿Cuál de las tangentes a la elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ está más alejada del origen?

Solución. La ecuación de la tangente a la elipse en el punto está dada por $(2x_0 + y_0)x + (x_0 + 2y_0)y - 6 = 0$. Para hallar la distancia a esta recta desde el origen, normalizamos la ecuación, es decir, se divide por la suma de los cuadrados de los coeficientes de x y y. La distancia pedida es $6[(2x_0 + y_0)^2 + (x_0 + 2y_0)^2]^{1/2}$. Como el punto (x_0, y_0) está sobre la elipse, ésta se reduce a

$$6(15 + 3x_0y_0)^{-1/2} \tag{1}$$

¿Cómo se debe elegir a (x_0, y_0) sobre la elipse para que (1) sea un máximo?

Como el numerador de (1) es una constante, el problema de maximizar el cociente es equivalente a minimizar el denominador. $(15 + 3x_0y_0)^{1/2}$ tiene su valor mínimo cuando $15 + 3x_0y_0$ tenga su valor mínimo, y esto sucede cuando x_0y_0 es muy pequeño. El producto x_0y_0 puede ser negativo; pero es acotado inferiormente, puesto que $15 + 3x_0y_0$ es positivo cuando (x_0, y_0) está sobre la elipse. El problema se ha reducido ahora a: dado (x, y) que verifique la ecuación de la elipse, halle el valor mínimo que toma

$$P = xy \tag{2}$$

Derivando la ecuación de la elipse y (2) con respecto a x se obtiene

$$2x + xD_xy + y + 2yD_xy = 0 \quad \text{y} \quad D_xP = xD_xy + y, \text{ de donde } D_xP = 2\frac{y^2 - x^2}{x + 2y}$$

Igualando a cero esta última expresión vemos que los valores extremos de P se presentan en la intersección de las rectas $y = x$ y $y = -x$ con la elipse. Estos puntos son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ para la primera recta y $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ para la segunda. Los valores correspondientes de P son $P = 1$ y $P = -3$. El primero corresponde a un máximo y el segundo a un mínimo. Concluimos que las tangentes por los puntos $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ son las más alejadas del origen y que están a una distancia igual a 6.

Problema 9-67 Dos rectas paralelas se cortan por una recta AB. Desde el punto C se traza una recta que corta a AB. ¿Cómo se debe elegir esta recta para que la suma de las áreas de los triángulos ACP y QPB sea un mínimo? (Vea Fig. 9-20.)

Solución. Suponga que las longitudes de AC y AB son a y b, respectivamente. Sean x y y las longitudes de AP y QB. Como los dos triángulos son semejantes tenemos que

$$a : x = y : (b - x) \quad \text{o} \quad y = \frac{a(b - x)}{x}$$

Si α es el ángulo en A, la suma de las áreas es

$$\frac{1}{2} ax \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2}(b - x)\, y \operatorname{sen} \alpha$$

Al remplazar el valor de y se obtiene la función $f(x) = x + \dfrac{(b - x)^2}{x}$, la cual se quiere minimizar.

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{b - x}{x}\right)^2 - 2\frac{b - x}{x} = 2 - \frac{b^2}{x^2}, \; f''(x) = 2\frac{b^2}{x^3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

el cual da el área mínima.

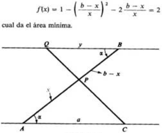


Figura 9-20

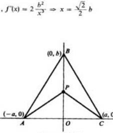


Figura 9-21

Problema 9-68 Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = BC$. Sea P un punto sobre la altura dibujada desde B. ¿Para qué posición de P es mínima la suma de la distancia de P a los vértices? (Vea Fig. 9-21.)

Solución. Tenemos que $AC = 2a$, $OB = b$; sea $P = (0, y)$ con $0 < y < b$. La función que se va a minimizar es $F(y) = b - y + 2(y^2 + a^2)^{1/2}$. Su derivada es $F'(y) = -1 + 2y(y^2 + a^2)^{1/2}$. La derivada cambia de signo, de más a menos, cuando y pasa por el valor $y = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Hay dos posibilidades: *a)* $a \leq \sqrt{3}b$. En este caso el valor crítico pertenece al intervalo $[0, b]$ y $y = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$ da un mínimo para la suma de las distancias. P está caracterizado por los segmentos PA, PB y PC, que forman ángulos iguales entre sí, puesto que el

ángulo APO es de 60° cuando $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. *b)* $a > \sqrt{3}b$. Ahora el valor crítico está fuera del intervalo $[a, b]$; por tanto, $F'(y) < 0$ para $0 \leq y \leq b$. Entonces $F(y)$ disminuye a $F(b)$ cuando y aumenta hasta b, y la suma de las distancias es mínima cuando $P = B$; el mínimo es $2(a^2 + b^2)^{1/2}$.

Se puede objetar que P puede estar sobre la altura que pasa por B; por tanto, es legítimo considerar valores de y mayores que b. Si esto sucede, la distancia de P a B es $y - b$ y no $b - y$. Entonces la expresión para $F(y)$ cambia y se tiene que

$$F(y) = y - b + 2(y^2 + a^2)^{1/2}, \ b < y \ \text{y} \ F'(y) = 1 + 2y(y^2 + a^2)^{-1/2}$$

que siempre es positivo. Si definimos $F(y)$ para $y \geq 0$, $F(y) = b - y + 2(y^2 + a^2)^{1/2}$ para $0 \leq y \leq b$ y para $b < y$, y si $a > \sqrt{3}b$, entonces $F'(y) < 0$ en el primer intervalo, $y > 0$ en el segundo. Así $y = b$ da un mínimo lo cual confirma el resultado anterior. $F'(y)$ cambia de signo cuando y pasa por $y = b$, pero $F'(b)$ no existe y

$$\lim_{h \to 0} F'(b - h) \neq \lim_{h \to 0} F'(b + h)$$

Este problema muestra que la función cuyos valores extremos se tratan de hallar no es derivable en todos los puntos; por tanto, los valores extremos se pueden presentar en puntos donde la derivada no existe. En este caso no es suficiente analizar los ceros de la derivada, también se deben estudiar los puntos de discontinuidad.

Problema 9-69 Demuestre las siguientes desigualdades: *a)* $e^x > \frac{1}{1 + x}$, $x > 0$; *b)* $e^x > 1 + \lg(1 + x), x > 0$; *c)* $e^x > 1 + (1 + x)\lg(1 + x), x > 0$.

Solución. *a)* La derivada de $f(x) = (1 + x)e^x$ es positiva para $x \geq 0$; entonces $f(x) > f(0) = 1$.
b) Derive y use *a)*.
c) Derive y use *b)*.

Problema 9-70 Si $f(x)$ es derivable (no necesariamente continua) en cada punto x de $a \leq x \leq b$, y si $f'(x)$ toma los valores m y M, también toma todo valor u entre m y M.

Solución. Sean α, β puntos de $[a, b]$ con $f'(x_1) = m, f'(x_2) = M$. Considere la función continua

$$\phi(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

para un $h > 0$ fijo. Si $m < u < M$, entonces es posible elegir un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x_1 + h_1) - f(x_1)}{h_1} - m \right| < u - m \ \ \left| \frac{f(x_2 + h_2) - f(x_2)}{h_2} - M \right| < M - u$$

con $|h_1|$ y $|h_2|$ menores que δ. Sea $h = |h_1| = |h_2| < \delta$. Como

$$\frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{h_i} = \begin{cases} \phi(x_i) & \text{para } h_i > 0 \\ \phi(x_i - h_i) & \text{para } h_i < 0 \end{cases}$$

entonces existen puntos α, β en $[a, b]$, tales que

$$\phi(\alpha) < u < \phi(\beta)$$

Como ϕ es continua, se sabe, por el teorema del valor medio, que para un punto ξ entre α y β, $\phi(\xi) = u$. Según el teorema del valor medio, para un valor η entre ξ y $\xi + h$ se tiene que $f'(\eta) = \phi(\xi) = u$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Teorema del valor medio

1. Definida una función f como sigue:

$$f(x) = \frac{3 - x^2}{2} \text{ si } x \leq 1, f(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 1$$

a) Bosqueje el grafo de f para x sobre el intervalo $0 \leq x \leq 2$.
b) Muestre que f satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre el intervalo $[0,2]$ y determine todos los valores medios estipulados por el teorema.

Resp.: *b*) $c = 1/2, c = \sqrt{2}$

2. Muestre que la fórmula del valor medio puede expresarse en la forma

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h) \text{ donde } 0 < \theta < 1$$

Determine θ en términos de x y h cuando: *a*) $f(x) = x^2$; *b*) $f(x) = x^3$. Conserve x fijo, $x \neq 0$, y encuentre el límite de θ en cada caso cuando $h \to 0$.

Resp.: *a*) $\theta = 1/2, \theta \to 1/2$

b) $\theta = \dfrac{x + 1/3\,h}{x + \sqrt{x^2 + xh + 1/3\,h^2}}$; $\theta \to 1/2$ si $x > 0$

3. Determine el número de raíces de la ecuación $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2 = 0$.

Solución. La derivada de f, $f'(x) = 20x^3(x - 1)$, es cero solo cuando $x = 0$ o $x = 1$. Consecuentemente, la ecuación $f(x) = 0$ puede tener a lo sumo una raíz real en cada uno de los intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ y $]1, +\infty[$. (Suponga lo contrario, o sea, que hay dos raíces en el intervalo $]0, 1[$. Por el teorema de Rolle, f' debería ser cero en algún punto en el intervalo, lo cual es imposible.) Observemos que

$$f(0) = 2 > 0 \text{ y } f(1) = 1 > 0$$

Sabemos también que para una cantidad entera positiva suficientemente grande n, $f(-n) < 0$ y $f(n) > 0$. Por tanto, por el teorema del valor intermedio, hay una raíz en el intervalo $]-\infty, 0[$. Además, no puede haber raíces en el intervalo $]0, 1[$. (El valor mínimo de f sobre el intervalo $[0, 1]$ es uno. De otra manera, f tendría un mínimo local en algún punto en el intervalo $]0, 1[$ y f' sería cero en ese punto.) Uno puede deducir de modo análogo que no hay raíces en el intervalo $]1, +\infty[$.

De lo cual podemos concluir que la ecuación $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2 = 0$ tiene exactamente una raíz real y que esta raíz es negativa.

4. Muestre por la construcción de contraejemplos que las hipótesis del teorema del valor medio no pueden ser significativamente simplificadas, es decir, debilitadas.

Resp.: La derivabilidad sobre el intervalo $]a, b[$ es esencial, como se evidencia por la función $|x|$ o $x^{2/3}$ sobre el intervalo $[-1, +1]$. La continuidad en los puntos finales del intervalo $[a, b]$ es esencial, como se evidencia por la función $x - [x]$ sobre el intervalo $[2,3]$.

***5.** Suponga que P es el polinomio.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

donde $a_0 \neq 0$. Definimos $P(+\infty) = a_0$ y $P(-\infty) = a_0(-1)^n$.

Suponga también que las ecuaciones $P(x) = 0$ y $P'(x) = 0$ no tienen raíces reales comunes y que $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ son las raíces reales de la ecuación $P'(x) = 0$. Pruebe que el número de raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$ es exactamente igual al número de cambios de signo en la sucesión

$$P(-\infty), P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_m), P(+\infty)$$

Aplique este resultado al Ejercicio 3. Pruebe también que la ecuación

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$$

tiene una raíz real si n es impar y ninguna raíz real si n es par.

6. Decimos que x_0 es un cero de $f \Leftrightarrow f(x_0) = 0$. Así, los ceros de $x^2 - 1$ son $+1$ y -1. Suponga que f y g son funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con la propiedad

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Pruebe que los ceros de f y g separan una de la otra en el siguiente sentido: entre dos ceros consecutivos cualesquiera de una función encontramos exactamente un cero de la otra función. (Suponga que esto es falso, y aplique el teorema de Rolle a f/g o g/f como convenga.) Este resultado es importante en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales. Observe que se aplica si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

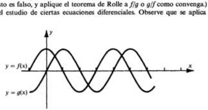


Figura 9-22

7. Use el teorema del valor medio para deducir las siguientes desigualdades:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.
b) $ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$ si $0 < y \leq x$, $n = 1,2,3, \ldots$

8. Use el teorema del valor medio para mostrar que

$$\left|\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\right| \leq |b - a| \text{ si } x \neq 0$$

9. Use el teorema de Rolle para mostrar los intervalos en los cuales la derivada de $f(x)(x - r_1) \ldots (x - r_n)$ tiene ceros, con $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$.

Resp.: f' tiene ceros en r_i, r_{i+1}, $i = 1, \ldots, n - 1$ puesto que f tiene ceros en $r_1, \ldots, r_n$.

10. ¿Por qué se puede aplicar el teorema de Rolle a todas las restricciones de $|x^2 + x + 1|^{-3}$ y no se puede aplicar a algunas restricciones de $|\operatorname{sen} x|$?

11. Muestre que $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ tiene un cero real; ¿cómo se puede generalizar este resultado a polinomios sin potencias pares?

Resp.: Muestre que f' nunca es cero, pero f cambia de signo.

12. Muestre que los grafos de las siguientes funciones tienen pendientes iguales en todo punto y halle su diferencia constante:

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$, $x^4 + 3$. *Resp.:* ± 4

b) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$, $2 \operatorname{sen}^2 (x + \pi/4)$. *Resp.:* 0

c) $\dfrac{1}{x^2 - 1}, \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Resp.:* ± 1

d) $\cos 2x$, $2 \cos^2 x$. *Resp.:* ± 1

13. Aplique el teorema del extremo del tenedor para obtener el extremo global de las siguientes funciones:

a) $x^2 - 3x + 2$ sobre $\mathbf{R}$. *Resp.:* min $-1/4$, no max

b) $\dfrac{2}{x} + 2\pi x^2$ sobre $]0, +\infty[$. *Resp.:* min $3\sqrt[3]{2\pi}$, no max

c) $x(1 - 2\pi x^2)$ sobre $[0, +\infty[$. *Resp.:* max $\dfrac{2}{3\sqrt{6\pi}}$, no min

14. Muestre que para cualquier par de números reales a y b la función $f(x) = (x - a)(x - b)$ tiene un mínimo global en $\frac{a+b}{2}$ y es $-\frac{(a-b)^2}{4}$.

15. Empleando el concepto de extremo, muestre que $f(x) = x^2 + ax + b$ no tiene ceros reales si $a^2 - 4bc < 0$. ¿Cómo se aplica este resultado a $g(x) = ax^2 + bx + c$?

16. Para las siguientes funciones halle el valor c del T.V.M. para segundas derivadas si x_0 y x son dados.

a) $3x^2 - 1$, $x_0 = 1$, $x = 12$. *Resp.:* 16/15

b) x^4, $x_0 = 0$, $x = 3$. *Resp.:* $\sqrt{3/2}$

c) $1/x$, $x_0 = 1$, $x = 2$. *Resp.:* $\sqrt[3]{2}$

17. Verifique que:

a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \frac{1}{2}x^2$ sobre **R**.

Resp.: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + \cos 0(x - 0) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} c(x - 0)^2 = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} cx^2$; por tanto, $|\operatorname{sen} x - x| \leq$ $\leq \frac{1}{2}\operatorname{sen} c\,|x|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2$.

b) $|\cos x - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$ sobre **R**.

c) $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|x|$ sobre $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] - \{0\}$.

d) $|\operatorname{tg} x - x| \leq \frac{8}{9}x^2$ sobre $[0, \pi/6]$.

18. Muestre que $(x - a)(b - x) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ empleando la teoría de extremos.

19. Aproxime y limite el error de:

a) $\sqrt{4{,}02}$. *Resp.:* $2{,}00500000 \pm 0{,}00000625$

b) $\sqrt[3]{8{,}01}$. *Resp.:* $2{,}0008333 \pm 0{,}0000005$

c) sen 1,244.

CAPITULO 10

Teorema del valor medio para segundas derivadas

El siguiente teorema es una generalización del T.V.M. para primeras derivadas y su generalización conduce al teorema de Taylor. Sirve para estimar hasta qué punto la tangente puede remplazar el grafo alrededor de un punto para obtener los valores funcionales.

Teorema del valor medio para segundas derivadas. Sea f: $[a, b] \to \mathbf{R}$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$; f y f' continuas sobre $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Entonces para todo $x \in [a, b]$ existe un c tal que $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$ y $x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x$.

Demostración. Sea x un punto fijo en $[a, b]$ y K el único número real que satisface la igualdad

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = K(x - x_0)^2 \qquad (10\text{-}1)$$

Siguiendo la técnica de demostración del teorema del valor medio para primeras derivadas, se busca una función que tenga raíces en x y x_0. Tal función se define haciendo $x_0 = t$ en (10-1)

$$d(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x - t)] - K(x - t)^2 \qquad (10\text{-}2)$$

sugerida por (10-1). Como $d(x_0) = 0$ y $d(x) = 0$, de (10-1) se sigue que $d(x_0) = 0$, por la manera como se eligió k; como $d(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe un c tal que

$$d'(c) = 0 \text{ y } x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x \qquad (10\text{-}3)$$

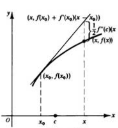


Figura 10-1

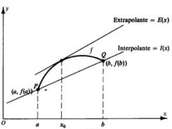


Figura 10-2

Haciendo $d'(c) = 0$ se tiene

$$-f(c) - f'(c)(x - c) + f(c) + 2K(x - c) = 0 \qquad (10\text{-}4)$$

Resolviendo par K

$$K = \frac{f''(c)}{2} \qquad (10\text{-}5)$$

De (10-1) y (10-5) se tiene

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \text{ y } x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x \qquad (10\text{-}6)$$

Teorema de aproximación lineal. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, f y f' continuas sobre $[a, b]$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$. $I(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ (interpolante); $E(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ (extrapolante).

Entonces: *a*) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) - I(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - a)(x - b)$. Error que se comete al aceptar el interpolante como aproximación de $f(x)$.

b) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) - E(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2$. Error que se comete al aceptar el extrapolante como aproximación de $f(x)$.

c) Si $|f''(x)| \leq M$ sobre $]a, b[$, entonces $|f(x) - I(x)| \leq \frac{1}{2}M|(x - a)(x - b)|$ y $|f(x) - E(x)| \leq \frac{1}{2}M(x - x_0)^2$.

Demostración. *a*) Se fija un x en $]a, b[$ y sea K un número real tal que

$$f(x) - I(x) = K(x - a)(x - b) \qquad (10\text{-}7)$$

además se define $g(x)$ por

$$g(t) = f(t) - I(t) - K(t - a)(t - b),\ t \in [a, b] \qquad (10\text{-}8)$$

Según la definición de $I(x)$ en la hipótesis se sabe que $f(a) - I(a) = f(b) - I(b) = 0$, entonces $g(a) = g(x) = g(b) = 0$, según (10-7) y (10-8).

Aplicando dos veces el teorema de Rolle a g se obtiene

$$g'(c_1) = 0 = g'(c_2) \text{ y } a < c_1 < x < c_2 < b \qquad (10\text{-}9)$$

Por (10-9) podemos aplicar de nuevo el teorema de Rolle, esta vez a la derivada g' restringida al intervalo $[c_1, c_2]$ y se obtiene

$$g''(c_3) = 0 \text{ y } c_1 < c_3 < c_2 \qquad (10\text{-}10)$$

Calculando g'' según (10-8) y empleando el hecho de que $I'' = 0$, se tiene que

$$f''(c_3) - 2K = 0 \text{ y } c_1 < c_3 < c_2 \qquad (10\text{-}11)$$

Entonces $K = \dfrac{f''(c_3)}{2}$.

Según (10-7), la demostración de *a*) queda completa si se hace que c_3 desempeñe el papel de c. La conclusión *c*) se deduce aplicando la función valor absoluto a *a*) y *b*) y remplazando $|f''(c)|$ por M.

. PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 10-1 Sea $f(x) = x^3$; halle c del T.V.M. para segundas derivadas si $x_0 = 0$ y $x = 2$.

Solución. Como $f' = 3x^2$ y $f'' = 6x$, se tiene que $2^3 = 0^3 + 3(0)^2(2 - 0) + 3c(2 - 0)^2$; por tanto, $8 = 12c$ y $c = \frac{2}{3}$.

Problema 10-2 Use el T.V.M. para segundas derivadas para mostrar que sen $x/x \to 1$. También halle $\delta > 0$ tal que para un $\varepsilon > 0$ dado, $|\text{sen } x/x - 1| < \varepsilon$ para $0 < |x| < \delta$.

Solución. Sea $x_0 = 0$. Entonces, $\text{sen } x = \text{sen } 0 + (\cos 0)(x - 0) - \frac{1}{2}(\text{sen } c)(x - 0)^2$, es decir, $\text{sen } x = x - \frac{1}{2}(\text{sen } c)x^2$. Dividiendo por $x \neq 0$, se obtiene

$$\frac{\text{sen } x}{x} - 1 = -\frac{1}{2}(\text{sen } c)x^2 \text{ y } 0 \leq \left|\frac{\text{sen } x}{x} - 1\right| \leq \frac{1}{2}|\text{sen } c|\ |x| \leq \frac{1}{2}|x| \tag{1}$$

Como $\frac{1}{2}|x| \to 0$ si $x \to 0$, sabemos por el teorema del sandwich que sen $x/x - 1 \to 0$ si $x \to 0$, entonces sen $x/x \to 1$ si $x \to 0$. Para el $\varepsilon > 0$ dado es evidente según (1) que $|x| < 2\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\text{sen } x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Así $\delta = 2\varepsilon$ sirve.

Problema 10-3 Use el T.V.M. para segundas derivadas para mostrar que $|\text{tg } x - x| < \varepsilon$ para $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$ y $|x| < \pi/4$.

Solución. Haciendo $x_0 = 0$ en el T.V.M. para segundas derivadas se tiene

$$\text{tg } x - \text{tg } 0 + (\sec^2 0)\, x + (\sec^2 c \cdot \text{tg } c)x^2$$

entonces

$$\text{tg } x - x = (\sec^2 c \cdot \text{tg } c)x^2 \text{ y } 0 \lesssim c \lesssim x$$

Como $|x| < \frac{\pi}{4} \Rightarrow |c| < \frac{\pi}{4}$, $|\text{tg } c| < 1$ y $\sec^2 c < 2$, así $|\text{tg } x - x| = \sec^2 c\, |\text{tg } c|\, x^2 \leq 2x^2$.

Por tanto, $2x^2 < \varepsilon \Rightarrow |\text{tg } x - x| < \varepsilon$. Pero $2x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{2}\,|x| < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}$.

De la misma manera, $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon} \Rightarrow |\text{tg } x - x| < \varepsilon$. Por ejemplo, $|x| < 0{,}01 \Rightarrow |\text{tg } x - x| < 0{,}02$.

Problema 10-4 Muestre que en la clase de las funciones que tienen segunda derivada, $f'' = 0 \Rightarrow f$ es una función lineal.

Solución. Según el T.V.M. para segundas derivadas, se tiene $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2$ para cualquier $x \in \mathbf{R}$, con $x_0 \lesssim c \lesssim x$. Como $f'' = 0$, entonces $f''(c) = 0$; por tanto, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, es decir, es una función lineal.

Problema 10-5 Aproxime $\sqrt{4{,}01}$.

Solución. Escribiendo el T.V.M. para segundas derivadas en la forma $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R$, entonces si $x_0 = 4$ y $h = 0{,}01$, se busca $f(x_0 + h)$ con $f(x) = x^{1/2}$.

Como $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$ y $f''(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$, remplazando estos valores, se tiene

$$\sqrt{4{,}01} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0{,}01) + R,\ R = -\frac{(0{,}01)^2}{8C^{3/2}} \text{ y } 4 < c < 4{,}01$$

Asi $\sqrt{4{,}01} = 2{,}0025 \pm 0{,}000002$, porque $|R| \leq \frac{0{,}0001}{8} \cdot \frac{1}{4^{3/2}} < 0{,}000002^{-}$.

Problema 10-6 Muestre que si $|f''(x)| \leq M$ sobre $]a, b[$, entonces $|f(x) - I(x)| \leq \leq 1/8\, M(b - a)^2$.

Solución. Usaremos el resultado $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$, demostrado anteriormente, que es equivalente a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$.

Si $a < x < b$, entonces $x - a > 0$, $b - x > 0$ y $(x - a) + (b - x) = b - a$; por tanto, $|f(x) - I(x)| = = |\frac{1}{2} f''(c)(x - a)(x - b)| \leq \frac{1}{2} M(x - a)(b - x) \leq \frac{1}{2} M \frac{(b - a)^2}{4} = 1/8\,(b - a)^2$.

Problema 10-7 Use el teorema de aproximación lineal para calcular sen 1,243 por interpolación y extrapolación.

Solución. *Interpolación.* Según *b*) del teorema de aproximación lineal y el problema anterior, sen 1,243 = $= \text{sen } 1{,}24 + \frac{\text{sen } 1{,}25 - \text{sen } 1{,}24}{1{,}25 - 1{,}24}(1{,}243 - 1{,}24) \pm R$ con $|R| \leq \frac{1}{8}(1{,}25 - 1{,}24)^2 = 0{,}0000125 = 0{,}94578 + + (0{,}320)(0{,}003) \pm 0{,}0000125 = 0{,}94684 \pm 0{,}0000125$.

Extrapolación. Según *a*) y *c*) del teorema de aproximación lineal, sen 1,243 = sen 1,24 + cos 1,24(1,243 − − 1,24) + R con $|R| \leq \frac{1}{2}(1{,}243) - 1{,}24)^2 = 0{,}0000045 = 0{,}94578 + (0{,}32480)(0{,}003 \pm 0{,}0000045 = = 0{,}94685 \pm 0{,}0000045$.

Problema 10-8 Demuestre si $f(x)$, junto con sus $(n - 1)$ primeras derivadas, son continuas sobre el intervalo $a \leq x \leq b$ y si $f^{(n)}(x)$ existe en todas partes del intervalo, excepto posiblemente en los extremos, entonces existe un valor de x, digamos $x = x_0$, entre a y b tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

Demostración. Si $n = 1$, se tiene el teorema del valor medio. Sea k definida por

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} + k(b - a)^n \quad (1)$$

y considere

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - x)^{n-1} + k(b - x)^n$$

Como $F(a) = 0$ por (1) y $F(b) = 0$, según el teorema de Rolle existe un $x = x_0$, con $a < x_0 < b$ tal que

$$F'(x_0) = f'(x_0) + \{f''(x_0) \cdot (b - x_0) - f'(x_0)\} + \ldots + \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n - 2)!}(b - x_0)^{n-2} \right\} -$$

$$- kn(b - x_0)^{n-1} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - kn(b - x_0)^{n-1} = 0$$

Entonces $k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ y (1) se convierte en

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

CONCAVIDAD

Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivable en $x_0 \in \mathscr{D}_f$; decimos que f es:

a) Cóncava hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) en $(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow E_1(x) > 0$ (respectivamente, < 0) para todo $x \in \mathscr{D}_f - \{x_0\}$ en un entorno de x_0, para el cual $E_1(x) = f(x) - - E(x)$ y $E(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

En otras palabras, el grafo de f está localmente por encima (respectivamente, por debajo) de la tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$.

b) Tiene un punto de inflexión en $[x_0, f(x_0)] \Leftrightarrow$ que la restricción de f a $\mathscr{D}_f \cap [x_0, +\infty[$ es cóncava hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) y la restricción de f a $\mathscr{D}_f \cap]-\infty, x_0]$ es cóncava hacia abajo (respectivamente, hacia arriba) en $(x_0, f(x_0))$.

Teorema de concavidad. Sea f: $]a, b[\to \mathbf{R}$, f derivable sobre $]a, b[$, y f derivable dos veces en $x_0 \in]a, b[$. Entonces:

a) $f''(x_0) > 0$ (respectivamente, < 0) $\Rightarrow$ el grafo de f es cóncavo hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) en $(x_0, f(x_0))$.

b) f es dos veces derivable sobre $]a, b[$ y $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ en $a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de f.

Demostración. Para demostrar *a)* suponga que $f''(x_0) > 0$. Entonces, por el teorema del incremento local aplicado a f', existe un entorno de x_0 en el cual $f'(x) - f'(x_0) > 0$ para $x > x_0$ y $f'(x) - f'(x_0) < 0$ para $x < x_0$.

Concretándonos al entorno de x_0, si $E_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow E_1'(x) = = f'(x) - f'(x_0)$.

Como $E_1'(x) > 0$, para $x > x_0$ y $E_1'(x) < 0$, para $x < x_0$, por el teorema de monotonía, $x > x_0 \Rightarrow E_1(x) > E_1(x_0)$, y $x < x_0 \Rightarrow E_1(x) > E_1(x_0)$.

Como $E_1(x_0) = 0 \Rightarrow E_1(x) > 0$ para $x > x_0$ y $x < x_0$, es decir, que el grafo de f es cóncavo hacia arriba en $(x_0, f(x_0))$. El caso $f''(x_0) < 0$ es análogo.

Para *b)* $E_1(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2$ con $x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x$.

Como c está en el mismo lado de x_0 que x, y $E_1(x)$ tiene el signo de $f''(c)$, entonces $E_1(x)$ cambia de signo en x_0 lo mismo que f'' según la hipótesis.

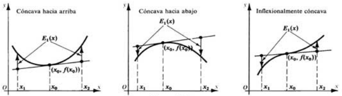


Figura 10-3

Teorema del extremo local cóncavo. Hipótesis: Las mismas del teorema de concavidad. Entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ (respectivamente, > 0) $\Rightarrow$ $f(x_0)$ es un máximo local (respectivamente, mínimo).

Demostración. De $E_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Entonces $f'(x_0) = 0 \Rightarrow E_1(x) = f(x) - - f(x_0) \Rightarrow f$ es localmente mínima en x_0 si $E_1(x) \geq 0$ en un entorno de x_0. Si $f''(x_0) > 0$ se sabe, por el teorema de concavidad, que $E_1(x) \geq 0$ en un entorno de x_0; entonces $f(x_0)$ es un mínimo local. En forma análoga se demuestra que $f''(x_0) < 0$.

Definición de concavidad sobre un intervalo. Dada $f\colon]a, b[\to \mathbf{R}$, f es dos veces derivable sobre $]a, b[$, se dice que el grafo de f es cóncavo hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) sobre $]a, b[\Leftrightarrow f'' > 0$ (respectivamente, < 0) sobre $]a, b[$.

Teorema de la cuerda tangente. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$, f y f' continuas sobre $[a, b]$. $E_2(x) = f(x) - l(x)$; $E_1(x) = f(x) - E(x)$. Entonces $f'' > 0$ (respectivamente, < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow \begin{cases} E_2 \leq 0 \text{ (respectivamente, } \geq 0 \\ E_1 \geq 0 \text{ (respectivamente, } \leq 0) \end{cases}$ sobre $[a, b]$.

Demostración. La demostración es sencilla teniendo en cuenta las dos fórmulas del valor medio, deducidas del T.V.M. para segundas derivadas y del teorema de aproximación lineal.

$$E_1(x) = \tfrac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2 \text{ y } x \lesseqgtr c \lesseqgtr x_0 \tag{10-12}$$

$$E_2(x) = \tfrac{1}{2}f''(c)(x - a)(x - b) \text{ y } a < c < b \tag{10-13}$$

De (10-12) es evidente que $f'' > 0$ (respectivamente, < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow E_1(x) \geqslant 0$ (respectivamente, < 0) sobre $[a, b]$.

Como $(x - a)(x - b) \leq 0$, sobre $[a, b]$, vemos que $f'' > 0$ (respectivamente, < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow E_2 \leq 0$ (respectivamente, ≥ 0) sobre $[a, b]$.

Teorema del extremo global cóncavo. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathcal{D}_f$ un intervalo, f dos veces derivable sobre el interior de $\mathcal{D}_f$, f continua sobre $\mathcal{D}_f$. Entonces $f'(x_0) = 0$ y $f'' < 0$ (respectivamente, > 0) sobre el interior de $\mathcal{D}_f \Rightarrow f(x_0) = \max f$ (respectivamente, $\min f$).

Demostración. La clave de la demostración la da la fórmula del T.V.M. para segundas derivadas.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(c)(x - x_0)^2 \text{ y } x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x \tag{10-14}$$

Por (10-14) $f'(x_0) = 0$ y $f'' < 0$ sobre el interior de $\mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$ para todos $x \in \mathcal{D}_f$.

Así $f(x_0)$ es un máximo global de f. Análogamente se demuestra que el caso $f'' > 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 10-9 Estudie la concavidad de $f(x) = x^2$ sobre $\mathbf{R}$ a partir de la definición.

Solución. Sea $x_0 \in \mathbf{R}$ fijo. Entonces $E_1(x) = x^2 - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_1(x) = (x - x_0)[(x + x_0) - 2x_0] = (x - x_0)^2 > 0,\ x \neq x_0$$

Así el grafo de $f(x) = x^2$ es cóncavo hacia arriba en cada punto de $\mathbf{R}$. Además, $f''(x) = 2 > 0$. Por tanto, según el teorema de concavidad, la función es cóncava en todo punto del grafo.

Problema 10-10 Si $f(x) = x^3$, entonces $f''(x) = 6x$. Como $6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ y $6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$, el grafo de la función cúbica es cóncavo hacia arriba en los puntos de $]0, +\infty[$ y cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 0[$; según *b*) del teorema de concavidad el punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

Problema 10-11 Halle los puntos de inflexión del grafo de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x - 7$.

Solución. Como $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, se tiene que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $x = 2$.

Así los puntos $(0, -7)$, $(2, -21)$ son los posibles puntos de inflexión. Como $12x(x - 2) < 0$ en $0 < x < 2$ y $12x(x - 2) > 0$ para $x < 0$, esto muestra que $(0, -7)$ es punto de inflexión. Como $12x(x - 2) > 0$ para $x > 2$ y $12x(x - 2) < 0$ para $0 < x < 2$, el cambio de signo garantiza que $(2, -21)$ es también un punto de inflexión.

Problema 10-12 *a)* Si $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sobre $\mathbf{R}$; *b)* $f(x) = \operatorname{sen} x$. ¿Cuáles son sus máximos y mínimos?

Solución. *a)* $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Como $f''(2) = 6{,}2 > 0$ y $f''(-2) = 6(-2) < 0$, el teorema del extremo local cóncavo dice que $f(2) = -15$ es un mínimo local y $f(-2) = 17$ es un máximo local.

b) $f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n un entero.

Como $f''\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ y $f''\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, los máximos locales se presentan en $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ y los mínimos locales en $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Problema 10-13 Halle los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 25x - 6$.

Solución. $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 25$. $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2) = 12(x + 2)(x - 1)$.

Pero $\{x : (x + 2)(x - 1) < 0\} = \{x : x + 2 > 0 \text{ y } x - 1 < 0 \text{ o } x + 2 < 0 \text{ y } x - 1 > 0\} = \{x : x > -2 \text{ y } x < 1\} \cup \{x : x < -2 \text{ y } x > 1\} =]-2, 1[\cup \phi =]-2, 1[\Rightarrow \{x : (x + 2)(x - 1) > 0\} = \mathbf{R} -]-2, 1[=]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

Así f es cóncava hacia abajo en $]-2, 1[$ y hacia arriba en $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$. Por tanto, los puntos $(-2, -4)$ y $(1, -40)$ son puntos de inflexión.

Problema 10-14 Estudie los máximos y mínimos de $f(x) = x + 1/x$ sobre $]0, +\infty[$.

Solución.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ en }]0, +\infty[.$$

Como $f''(x) = 2/x^3$, entonces $f'' > 0$ sobre $]0, +\infty[$; entonces $f(1) = 2$ es un mínimo global según el teorema del extremo cóncavo global.

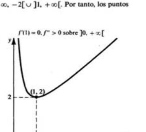


Figura 10-4

Problema 10-15 Demuestre que $xy \leq \frac{x^r}{r} + \frac{y^s}{s}$ si $x > 0$, $y > 0$, $r > 1$ y $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$.

Solución. Sea $f(x) = ax - \frac{x^r}{r} - \frac{a^s}{s}$ para $a > 0$ fijo. f es derivable sobre $]0, +\infty[$ y $f'(x) = a - x^{r-1} = 0$ y $x^{r-1} = a$. Pero como $r - 1 = r/s$ $\left(\text{porque } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right)$ se tiene $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{r/s} = a \Leftrightarrow x = a^{s/r}$.

Como $f''(x) = -(r-1)x^{r-2} < 0$ sobre $]0, +\infty[$, por el teorema del extremo cóncavo global $f(a^{r/s})$ es un mínimo global. Pero $s/r = s - 1$ implica que

$$f(a^{r/s}) = a^{s/r+1} - \frac{a^s}{r} - \frac{a^s}{s} = a^s - a^s\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) = a^s - a^s = 0$$

se ha mostrado que $0 \leq ax - \dfrac{x^r}{r} - \dfrac{a^s}{s}$ para todo $x > 0$; por tanto, si se remplaza por y la demostración queda completa.

Observe que si se hace $x = \sqrt{a}$ y $y = \sqrt{b}$ ($a \geq 0$ y $b \geq 0$) y $r = s = 2$, la desigualdad se convierte en $\sqrt{ab} \leq \dfrac{1}{2}(a + b)$.

Problema 10-16 *Definición.* Una función f es cóncava hacia arriba sobre un intervalo si para todo a, b del intervalo el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está por encima del grafo de f. Muestre que esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición. Una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo si para a, x y b en el intervalo, con $a < x < b$ se tiene que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

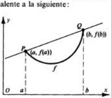


Figura 10-5

Esta recta está por encima del grafo de f en x si $g(x) > f(x)$, es decir, si

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si se cambia el sentido de la desigualdad se tiene la definición de función cóncava hacia abajo.

Problema 10-17 Muestre que f es cóncava hacia arriba (convexa) en un intervalo si, y solamente si, para todo x y y del intervalo se tiene que

$$f[tx + (1-t)y] < tf(x) + (1-t)f(y), \text{ para } 0 < t < 1$$

Solución. Los puntos del intervalo $]x, y[$ son de la forma $tx + (1-t)y = y$, $0 < t < 1$. En realidad, si $0 < t < 1$, entonces

$$x = tx + (1-t)x < tx + (1-t)y < ty + (1-t)y = y$$

y recíprocamente si $x < z < y$, entonces

$$z = tx + (1-t)y \text{ para } 0 < t = \frac{y - z}{y - x} < 1$$

Según el problema anterior f es convexa si, y solamente si,

$$\frac{f[tx + (1-t)y] - f(x)}{tx + (1-t)y - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

que es equivalente a

$$f[tx + (1-t)y] < tf(x) + (1-t)f(y)$$

Problema 10-18 Pruebe que si f y g son convexas y f creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

Solución. Si $a < x < b$, entonces $f(a) < f(x) < f(b)$; por tanto,

$$\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} < \frac{g[f(b)] - g[f(a)]}{f(b) - f(a)}$$

y, por tanto,

$$\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a} = \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} <$$

$$< \frac{g[f(b)] - g[f(a)]}{f(b) - f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g[f(b)] - g[f(a)]}{b - a}$$

Problema 10-19 *a)* Pruebe que si f es convexa, entonces $f[(x + y)/2] < [f(x) + f(y)]/2$. *b)* Si f satisface esta condición, muestre que $f[kx + (1 - k)y] < kf(x) + (1 - k)f(y)$, k un número racional, entre 0 y 1, de la forma $m/2^n$. *c)* Suponga que f satisface la condición de la parte *a)* y f continua. Muestre que f es convexa.

Solución. *a)* Es consecuencia del Problema 10-17 con $t = 1/2$.

b) La afirmación es verdadera para $n = 1$, es decir, $k = 1/2$. Suponga que para algún n es verdadera para todo x y y. Si $k = m/2^{n+1}$ está reducida a su mínima expresión, entonces k es impar. Entonces $k_1 = (m - 1)/2^{n+1}$ y $k_2 = (m + 1)/2^{n+1}$ se pueden expresar en la forma $a/2^n$; por tanto, la afirmación es verdadera para k_1 y k_2.

Observe también que $k = (k_1 + k_2)/2$.

Del resultado para k_1 y k_2 y la afirmación para $n = 1$, aplicados a $x' = k_1 x + (1 - k_1)y$ y a $y' = k_2 x + (1 - k_2)y$, se obtiene

$$f[kx + (1 - k)y] = f\left(\frac{x' + y'}{2}\right) < \frac{f(x')}{2} + \frac{f(y')}{2} < \frac{k_1 f(x) + (1 - k_1)f(y)}{2} +$$

$$+ \frac{k_2 f(y) + (1 - k_2)f(y)}{2} = kf(x) + (1 - k)f(y)$$

c) Sea $0 < t < 1$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número k de la forma $m/2^n$ que está tan próximo a t que

$$|f[kx + (1 - k)y] - f[tx + (1 - t)y]| < \varepsilon, \; |[kf(x) + (1 - k)f(y)] - [tf(x) + (1 - t)f(y)]| < \varepsilon$$

Entonces $f[tx + (1 - t)y] < f[tx + (1 - k)y] + \varepsilon < kf(x) + (1 - k)f(y) + \varepsilon < tf(x) + (1 - t)f(y) + 2\varepsilon$.

Así $f[tx + (1 - t)y] \le tf(x) + (1 - t)f(y)$. El grafo muestra que si se verifica la desigualdad estricta para un t, entonces se verifica para todo t, aplicando la desigualdad a x y $tx + (1 - t)y$ o a $tx + (1 - t)y$ y y.

Se tiene desigualdad estricta pata t de la forma $m/3$; por tanto, se tiene desigualdad estricta para todo t. (Vea Fig. 10-6.)

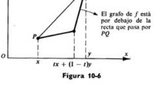


Figura 10-6

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para las siguientes funciones y los valores dados de x y x halle c por el T.V.M. para segundas derivadas.

a) $y = 3x^3 - 1,\ x_0 = 1,\ x = 1{,}2.$ *b)* $y = x^4,\ x_0 = 0,\ x = 3.$

Resp.: *a)* 16/15; *b)* $\sqrt{32}$

2. Verifique que

a) $|\text{sen}\, x - x| \leq \frac{1}{2} x^2$ sobre **R**. *b)* $|\cos x - 1| \leq \frac{1}{2} x^2$ sobre **R**.

Indicación: *a)* $\text{sen}\, x = \text{sen}\, 0 + \cos 0(x - 0) - \frac{1}{2}\, \text{sen}\, c(x - 0)^2 = x - \frac{1}{2}\, \text{sen}\, cx^2,$

$$\therefore |\text{sen}\, x - x| \leq \frac{1}{2}\, \text{sen}\, c\, |x|^2 \leq \frac{1}{2} |x|^2.$$

3. Complete lo siguiente:

a) $|\text{sen}\, 0{,}001 - 0{,}001| < .$ *b)* $|(\text{sen}\, 0{,}001/0{,}001) - 1| < .$

Resp.: *a)* Por el Ejercicio 2: 0,0000005. *b)* Por el Ejercicio 2: 0,0005

4. Aproxime y acote el error de:

a) $\sqrt[3]{8{,}01}.$ *b)* $\sqrt{4{,}02}.$

Resp.: *a)* $8{,}01 = 2{,}0008333 \pm 0{,}00000005.$ *b)* $4{,}02 = 2{,}00500000 \pm 0{,}00000625$

5. Determine los valores de a, b y c para que el grafo de $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tenga a $(-1, +1)$ como punto de inflexión de f, si la pendiente es 2.

Resp.: $a = -\frac{2}{3},\ b = -2,\ c = \frac{7}{3}$

6. Halle los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones, teniendo en cuenta el teorema del extremo local cóncavo y el teorema del extremo estacionario.

a) $2x^3 + 9x^2 - 24x + 6.$ *Resp.:* Máximo local 118 en -4; mínimo local -7 en 1

b) $\dfrac{1}{x^2 + 1}.$ *Resp.:* Máximo local 1 en 0, y no hay mínimo local

c) $x + \dfrac{1}{x - 1}$ sobre $\mathbf{R} - \{1\}.$

d) $3x - \dfrac{1}{x + 1}$ sobre $\mathbf{R} - \{-1\}.$ *Resp.:* No hay extremos

e) $\sqrt{x - 1}$ sobre $[1, +\infty[.$ *Resp.:* Mínimo local 0 en 1; no hay máximo local

7. Represente las siguientes funciones, mostrando los ceros, polos, puntos de inflexión, puntos locales máximos y mínimos, máximos intervalos de monotonía y máximos intervalos de concavidad.

a) $(x^2 - 3)(x - 1)^2.$

Resp.: Máximo local en $(1, 0)$; mínimo local en $(-1, -8)$ y $(3/2, -3/16)$. Cóncava en

$$x_1 = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{21}) \text{ y } x_2 = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{21})$$

Cóncava hacia arriba en $]-\infty, x_1[$ y $]x_2, +\infty[$; cóncava hacia abajo en $]x_1, x_2[$. Monótona decreciente en $]-\infty, -1]$ y $[1, 3/2]$; monótona creciente sobre $[-1, 1]$ y $[3/2, +\infty[$. No hay polos. Cero en $x = 1$ con tangente horizontal en este punto. Ceros en $\pm\sqrt{3}$.

b) $x\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$ sobre $\mathbf{R} -]0, 1].$

c) $x^4 - 6x^3 - 12x^2.$

d) $|\text{sen}\, x|.$

e) $|x - 1| + x^3 - 2x - 1.$

f) $|x^2 - 5x + 1|.$

g) $x - \text{sen}\, x.$

CAPITULO 11

Trazado de grafos

Construcción de curvas de la forma $y = f(x)$

El método a seguir es el siguiente:

1. Límites de variación de la x: existencia de la curva y simetrías. Se estudia en qué intervalo existe la curva; su simetría; si la curva es periódica o no, es decir, si se cumple que $f(x) = f(x + T)$, T se llama el periodo.
2. Se hallan las asíntotas y ramas parabólicas. Es decir, se hallan las asíntotas paralelas al eje X, las paralelas al eje Y y las asíntotas oblicuas.
3. Puntos de intersección con los ejes y signos de y.
4. Tabla de trazado de la curva.
5. Máximos y mínimos, crecimiento. Para ello hay que calcular y', con sus respectivas raíces, para ver los cambios de signo.
6. Puntos de inflexión, concavidad. Se calcula y''. Las raíces de y'' son los puntos de inflexión. El signo de y'' indica la concavidad.
7. Posición de la curva con relación a las asíntotas.
8. Tangentes en los puntos notables.
9. Determinación de algunos puntos.

Nota. Si la curva $f(x)$ es un polinomio entero, no tiene asíntotas; hay una rama parabólica de dirección OY. El estudio de y' es entonces fundamental. Si la curva es de la forma $y = f(x)/g(x)$, con f y g dos polinomios enteros, se tienen los siguientes casos: si $f(x)$ es de grado inferior al de $g(x)$, hay una asíntota paralela al eje X y que coincide con dicho eje. Si los dos polinomios son del mismo grado, hay una asíntota paralela al eje X. Si $f(x)$ es de grado superior en más de una unidad al grado de $g(x)$, hay una rama parabólica. Pueden existir varias asíntotas paralelas al eje Y dadas por las raíces reales de $g(x) = 0$.

Cuando se quiere construir una curva en la cual intervienen funciones exponenciales o logarítmicas, es conveniente recordar su grafo.

Curvas particulares

1. $y = mx + b$ es una recta que se construye hallando sus intersecciones con los ejes.
2. $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se construye hallando los puntos de intersección con el eje X y el máximo o mínimo.
3. $y = \dfrac{ax + b}{cx + c}$ es una hipérbola con asíntotas paralelas a los dos ejes.
4. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ es una hipérbola que tiene una asíntota paralela al eje Y y una asíntota cualquiera.

5. $y = mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ es una elipse si $a < 0$, una hipérbola si $a > 0$ y una parábola si $a = 0$.

A continuación se dan varias definiciones que muestran el proceso de construcción de una curva.

Definición. Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una curva $y = f(x)$ de tal forma que nada más que una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre este punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la curva.

Definición de asíntota vertical. La recta $x = a$ se dice asíntota vertical del grafo de la función f si por lo menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$.

d) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Definición de asíntota horizontal. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal del grafo de la función f si por lo menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

a') $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

b') $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Definición. Si existen los límites $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$ la recta $y = k_1 x + b_1$ es asíntota (oblicua a la derecha) o bien si $k_1 = 0$, horizontal derecha (paralela al eje OX).

Si existen los límites $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2$, la recta $y = k_2 x + b_2$ es asíntota (oblicua a la izquierda) o bien cuando $k_2 = 0$, horizontal izquierda (paralela al eje OX).

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 11-1 Halle las asíntotas de la curva $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Solución. Igualando a cero el denominador, obtenemos dos asíntotas verticales:

$$x = -1 \text{ y } x = 1$$

Buscamos las asíntotas oblicuas. Cuando $x \to +\infty$ tenemos

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot x} = 1, \; b_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

por consiguiente, la asíntota derecha será la recta $y = x$. Análogamente, cuando $x \to -\infty$ tenemos

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1, \; b_2 = \lim_{x \to -\infty} (y + x) = 0$$

De esta forma la asíntota izquierda es $y = -x$. (Vea Fig. 11-1.)

Problema 11-2 Halle las asíntotas de la curva $y = x + \ln x$.

Solución. Como $\lim_{x \to 0^+} y = -\infty$, la recta $x = 0$ será asíntota vertical (inferior). Como $x > 0$, tenemos que

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1, \; b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x = \infty$$

Por consiguiente, esta curva no tiene asíntotas oblicuas.

Definición. La función es simétrica con respecto a:

a) Al eje de las x, si al remplazar y por $-y$ la función es la misma.
b) Al origen, si al remplazar x por $-x$ y y por $-y$ la función es la misma.
c) A la recta $y = x$, si al remplazar x por y y y por x la función es la misma.
d) A la recta $y = -x$, si al remplazar x por y y y por x la función es la misma.

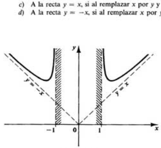


Figura 11-1

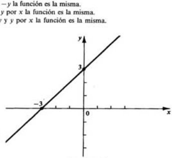


Figura 11-2

Problema 11-3 Halle el grafo de la función $y = x + 3$.

Solución. La función es una biyección de **R** sobre **R**. En efecto, es inyectiva porque $f(x_1) = x_1 + 3$ y $f(x_2) = x_2 + 3$ implican que $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1$; $f(x_1) = f(x_2)$ si, y solamente si, $x_1 = x_2$.

Es sobreyectiva porque para cualquier $y \in \mathbf{R}$ existe x tal que $f(x) = x + 3$, puesto que la ecuación $y = x + 3$ tiene por solución (única) $(y - 3)$.

La función es creciente porque $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Además, $\lim_{x \to +\infty} (x + 3) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} (x + 3) = -\infty$.

Las intersecciones con los ejes son $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $y = 3$.

Estos datos permiten construir la curva cuyo grafo se da en la Figura 11-2.

Problema 11-4 Construya el grafo de la función $y = x^2 - x - 2$.

Solución. *Definición.* Para todo x real, $f(x)$ existe. Inversamente, ¿es verdad que todo número real y es imagen por f de un número real x? Hallemos, en caso de que exista x, tal que $x^2 - x - 2 = y$. Esto equivale a resolver la ecuación $x^2 - x - 2 - y = 0$, la cual tiene raíces reales si

$$\Delta = 1 + 4(2 + y) \geq 0, \Rightarrow y \geq -\frac{9}{4}$$

Esto muestra que la función f es una aplicación de **R** sobre el conjunto $E = \left\{ y \in \mathbf{R} : y \geq -\frac{9}{4} \right\}$. Observe que no es una biyección de **R** sobre E, porque a todo elemento de E, distinto de $-\frac{9}{4}$, es la imagen de dos elementos de **R**.

Variación. Para todo x la función es derivable y $f'(x) = 2x - 1$; por consiguiente,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Esto dice que la función es decreciente si $x < 1/2$ pasa por un mínimo para $x = 1/2$, y creciente cuando $x > 1/2$.

En este caso se puede estudiar directamente el sentido de variación de la función; en efecto,

$$r = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2)^2 - x_2 - 2 - [(x_1)^2 - x_1 - 2]}{x_2 - x_1} = (x_2 + x_1) - 1$$

Si x_1 y x_2 son mayores que 1/2, la relación r es positiva, y, por tanto, la función f es creciente; si $x_1 < 1/2$ y $x_2 < 1/2$, la relación r es negativa, y, por tanto, f es decreciente.

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

La función $f(x)$ es mayor que un número $A > 0$ si $x \in \mathbf{R} - [\alpha, \beta]$ con α y β las raíces de la ecuación. Entonces,

$$\text{si } x \to +\infty, (x^2 - x - 2) \to +\infty$$
$$\text{si } x \to -\infty, (x^2 - x - 2) \to +\infty$$

Tabla de variación. Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 11-1.

TABLA 11-1

x		$1/2$		$\to \mathbf{R}$
$f'(x) = 2x - 1$	$-$	0	$+$	
$f(x) = x^2 - x - 2$	$+\infty \searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow +\infty$	

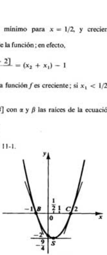


Figura 11-3

Representación gráfica. Para poder dibujar el grafo es conveniente conocer algunos puntos notables y las tangentes en esos puntos.

Vértice S: $x = 1/2$, $y = -9/4$; la derivada en este punto es nula; por tanto, la tangente es paralela al eje X.

Punto sobre OY: $x = 0, f(0) = -2, f'(0) = -1$, que es el coeficiente director de la tangente en A.

Punto sobre OY: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0. \Leftrightarrow x = -1, x = 2$. La curva corta los ejes en los puntos $B(-1, 0)$ y $C(2, 0)$. Las tangentes en esos puntos tienen por coeficientes directores: $f'(-1)$ en B, -3 y $f'(2)$ en C, 3.

Simetría. Si se cambia en la función x por $-x$, vemos que la función cambia; esto dice que la función no es simétrica con respecto al eje Y y lo mismo sucede con respecto al eje X. Por tanto, el grafo de la función es la Figura 11-3.

Problema 11-5 Construya el grafo de la función f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x - 2$.

Solución. Intervalo de estudio: $\mathbf{R}$.

Estudio en los extremos del intervalo: Para $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right]$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Variación. La función f es derivable para todo x y $f'(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$. Como $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$, entonces f es estrictamente creciente.

Tabla de variación. (Vea la Tabla 11-2.)

TABLA 11-2

x	$\longrightarrow$ **R**
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

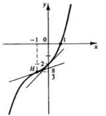


Figura 11-4

Representación gráfica. (Figura 11-4.) Puntos de inflexión.

$$f''(x) = x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

El punto H de abscisa -1 es el punto de inflexión y su ordenada es $f(-1) = \frac{8}{3}$. Para $x > -1$ la curva es cóncava hacia arriba, y para $x < -1$, cóncava hacia abajo.

Punto sobre el eje Y: Para $x = 0$, $f(0) = -2$ y $f'(0) = 1$.

Punto sobre el eje X: La abscisa de ese punto es la raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$. Vea al final la fórmula de solución de una ecuación cúbica.

Simetría. Si se cambia x por $-x$ y y por $-y$, vemos que la función cambia, entonces no es simétrica con respecto a ninguno de los ejes.

Problema 11-6

Estudie la función numérica f dada por $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

Solución. *Definición.* Para cualquier número real x existe la función; por consiguiente, el conjunto de definición de la función son los reales **R**.

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$. Para $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left[1 - \frac{12}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right]$, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

De manera más precisa: si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$. Como $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.
si $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$.

Esto dice que la curva de f admite una rama parabólica en la dirección de OY.

Variación. La función es derivable para todo x y $f'(x) = 3x^2 - 12$. Entonces

si $-2 < x < 2$, $f(x) < 0$ y f es decreciente;
si $x = 2$ o $x = -2$, $f(x) = 0$, entonces f pasa por un máximo o mínimo;
si $x < -2$ o $x > 2$, entonces $f(x) > 0$ y f es creciente.

Tabla de variación. Lo anterior se resume en la Tabla 11-3.

TABLA 11-3

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$ **R**
$f'(x) = 3(x^2 - 4)$		+	0	−	0	+	
$f(x) = x^3 - 12x + 2$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

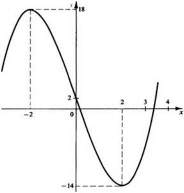


Figura 11-5

Máximo: $x = -2$, $y = f(-2) = 18$, $y' = 0$.
Mínimo: $x = 2$, $y = f(2) = -14$, $y' = 0$.
Punto sobre $0y$: $x = 0$, $y = f(0) = 2$, $y' = -12$.
Sea I el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 2$. La tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -12x + 2$.
Si x es positivo, $f(x) > y$ y los puntos de la curva están por debajo de la tangente que pasa por I.
Si x es negativo, $f(x) < y$ y los puntos de la curva están por encima de la tangente que pasa por I.

Simetría. Si se cambia x por $-x$ y y por $-y$, la ecuación cambia; por tanto, la curva no es simétrica con respecto a ninguno de los dos ejes.

Puntos de inflexión: $y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $f(0) = 2$. Por tanto, hay un punto de inflexión en $(0, 2)$. y'' es menor que cero para x negativo y positiva para x positivo, entonces a la izquierda de cero la curva es cóncava hacia abajo y a la derecha de cero cóncava hacia arriba.

Problema 11-7 Estudie la función numérica f tal que $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

Solución. *Definición.* Para todo x real existe la función. A la inversa, ¿es todo número real y imagen por f de un número real x?; es decir, ¿la ecuación $x^4 - 8x^2 + 7 = y$ admite soluciones reales? La ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} X^2 - 8X + 7 - y = 0 \\ X \geq 0 \\ X = x^2 \end{cases} \qquad (1)$$

El discriminante de la ecuación (1) es $\Delta = 16 - (7 - y) = 9 + y$. Entonces si $y < -9$, la ecuación (1) no tiene raíces reales. Lo cual indica que todo número real inferior a -9 no es imagen por f de un número real x.

Supongamos entonces que $y \geq -9$. El producto de las raíces de la ecuación (1) es igual a $(7 - y)$; la suma de sus raíces, a 8. Entonces si $y > 7$, el producto es negativo y el sistema propuesto no tiene dos raíces opuestas; si $-9 \leq y < 7$, el producto es la suma de las raíces de (1), positivas, luego la ecuación tiene dos raíces positivas y el número y es imagen de cuatro números reales (dos a dos opuestos). Entonces la función f es una aplicación del conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales sobre el conjunto E de los números reales y tales que $y \geq -9$. La función f no es una biyección de $\mathbf{R}$ sobre E porque los elementos de E son imágenes por f de dos, tres o cuatro números reales.

Para todo x real, $f(x) = f(-x)$, es decir, la función es simétrica con respecto al eje Y; por tanto, es suficiente estudiar su restricción al conjunto $\mathbf{R}$ de los reales no negativos.

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$. Para $x \neq 0$, $f(x) = x^4\left[1 - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^4}\right]$, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Como $\lim_{x \to \infty} f(x)/x = \infty$, se dice que la curva de f admite una rama parabólica en la dirección del eje Y.

Variación. La función es derivable para todo x y $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$. Por consiguiente,

$0 < x < 2 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ es decreciente;
$x > 2 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ es creciente;
$x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ y f pasa por un máximo;
$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$ y f pasa por un mínimo.

Tabla de variación. Los resultados anteriores se pueden resumir en la Tabla 11-4.

TABLA 11-4

x		-2		0		2		$\mathbf{R}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$-g$	↗	7	↘	$-g$	↗	$+\infty$

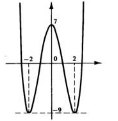


Figura 11-6.

Mínimo: $x = 2$, $f(2) = -9$, $f'(2) = 0$.
$x = -2$, $f(-2) = -9$, $f'(-2) = 0$.
Máximo: $x = 0$, $f(0) = 7$, $f'(0) = 0$.

Puntos sobre OX. Como $y = 0$, sus abscisas son las raíces de $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$. La ecuación asociada $X^2 - 8X + 7 = 0$ tiene por raíces 1 y 7, entonces

$$x = 1 \quad , \; f(1) = 0 \quad , \; f'(1) = -12$$
$$x = -2 \quad , \; f(-1) = 0 \quad , \; f'(-1) = 12$$
$$x = \sqrt{7} \quad , \; f(\sqrt{7}) = 0 \quad , \; f'(\sqrt{7}) = 12\sqrt{7}$$
$$x = -\sqrt{7}, \; f(-\sqrt{7}) = 0, \; f'(-\sqrt{7}) = -12\sqrt{7}$$

Simetría. Como para todo x, $f(x) = f(-x)$, la curva es simétrica con respecto al eje Y.

Puntos de inflexión. $f''(x) = 12x^2 - 16$. Como $f''(x) = 0$ implica que sus raíces son $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Entonces los puntos de inflexión son

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0{,}4\right) \text{ y } \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 0{,}4\right)$$

En el intervalo $]0, 1[$ la segunda derivada es negativa, entonces la curva es cóncava hacia abajo en este intervalo.
En el intervalo $]1, \sqrt{7}[$ la segunda derivada es positiva, entonces la curva es cóncava hacia arriba.
La Figura 11-6 da el grafo de la función.

Problema 11-8 Estudie la función numérica f tal que $f(x) = \dfrac{x + 4}{2x - 3}$ (función homográfica).

Solución. Para todo x real, excepto $x = 3/2$, existe la curva. Entonces la función f es una aplicación del conjunto $E = \mathbf{R} - \{3/2\}$ en el conjunto de los números reales. El conjunto E se puede escribir como

$$E = E_1 \cup E_2 = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

Recíprocamente, ¿cuáles son los números reales y que son imágenes de los elementos de E? De

$$y = \frac{x+4}{2x-3} \Leftrightarrow x(2y-1) = 3y + 4 \qquad (1)$$

Si $y \neq 1/2$, se obtiene $x = \frac{3y+4}{2y-1}$, y ese valor es diferente de 3/2; por tanto, $3/2 = \frac{2y+4}{2y-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow -3 = 8$, lo cual no es posible.

Si $y = 1/2$, ningún número real es solución de (1). Entonces todo número real x distinto de 1/2 es la imagen por f de un solo número real x distinto de 3/2. En otras palabras, la función f es una biyección del conjunto $E = \mathbf{R} - \{3/2\}$ sobre el conjunto $F = \mathbf{R} - \{1/2\}$.

Variación. La función f es derivable sobre el conjunto E y $f'(x) = \frac{-11}{(2x-3)^2}$. Entonces, para todo x distinto de 3/2, $f'(x) < 0$ y la función f es decreciente en cada uno de los intervalos E_1 y E_2.

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$. Para todo $x(\neq 0$ y en $E)$, $f(x) = (1 + 4/x)/(2 - 3/x)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1/2$$

Por tanto, la recta $y = 1/2$ es una asíntota a la curva de f.

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to 3/2$. Sea $x = 3/2 + h$, con $h \to 0$.

$$f(3/2 + h) = \frac{\frac{3}{2} + h + 4}{2\left(\frac{3}{2} + h\right) - 3}$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0^-} f(3/2 + h) = -\infty \text{ y } \lim_{h\to 0^+} f(3/2 + h) = +\infty$$

Tabla de variación. Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 11-5.

TABLA 11-5

x	$\longrightarrow$ 3/2	$\longrightarrow$ $\mathbf{R}$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^-$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\left(\frac{1}{2}\right)^+$

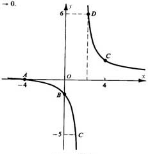


Figura 11-7

En el punto A: $x = -4$, $y = 0$, $y' = -1/11$; en el punto B: $x = 0$, $y = -4/3$, $y' = 11/9$; en el punto C: $x = 1$, $y = -5$, $y' = -11$; en el punto D: $x = 2$, $y = 6$, $y' = -11$.

Como $f(x) \neq f(-x)$, la curva no es simétrica con respecto al eje Y.

Puntos de inflexión. Como

$$y'' = \frac{-11 \cdot 2^2}{(2x-3)^3} = 0$$

esto quiere decir que no tiene puntos de inflexión.

Además en $]-\infty, 3/2[$ y'' es negativa; por tanto, la función es cóncava hacia abajo, y como $y'' > 0$ en $]3/2, +\infty[$, es cóncava hacia arriba.

Problema 11-9 Estudie la función f tal que $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$.

Solución. *Definición* Como la ecuación $x^2 - 5x + 7 = 0$ no tiene raíces reales, el conjunto de definición es $\mathbf{R}$.

Forma canónica. La función se puede escribir como

$$f(x) = 2 + \frac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} \qquad (1)$$

Estudio de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

De la expresión (1) resulta que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$. La recta de ecuación $y = 2$ es una asíntota de la curva y además para

$$x > 3, \frac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} > 0$$

entonces $f(x) > 2$ y la curva está por encima de la asíntota:

$x = 3$, $f(x) = 2$. La curva corta la asíntota en el punto $(3, 2)$.

$x < 3, \dfrac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} < 0$. La curva está por debajo de la asíntota.

Variación. Empleando la expresión (1) se obtiene $f'(x) = \dfrac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)}$; entonces

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ o } x = 2)$. Además $f(2) = -1$ y $f(4) = 3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ o } x > 4)$

Tabla de variación. Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 11-6.

TABLA 11-6

x		2		4		$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2^- ↘	-1	↗	3	↘	2^+

Punto sobre la asíntota: $x = 3$, $y = 2f'(x) = 3$.

Puntos de intersección con el eje X: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ o } x = 5/2)$, $f(1) = -3$, $f(5/2) = 4$.

Puntos de inflexión. Como

$$f''(x) = \frac{-(x^2 - 5x + 7)^2 \; 3(2x - 6) + 3(x^2 - 6x + 8) \; 2(x^2 - 5x + 7)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$$

entonces los puntos de inflexión son: $x = 1$, $x = 5/2$, $x = 4$.

Además en $]-\infty, 1[$, $]5/2, 4[$, $f'' < 0$, es decir, la curva es cóncava hacia abajo y en $]1, 5/2[$, $]4, +\infty[$, $f'' > 0$, es decir, la curva es cóncava hacia arriba.

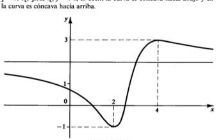


Figura 11-8

Problema 11-10 Estudie la función $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

Solución. *Conjunto de partida.* Como para todo x, $4x^2 + 2x + 1 > 0$, el conjunto de partida es **R**.

Estudio en los entornos de infinito. Si $x \to +\infty$, $f(x) = x\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 2$. Por otra parte,

$$f(x) - 2x = \sqrt{4x^2+2x+1} - 2x = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x} =$$

$$= \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \frac{1}{2}$$

La recta de ecuación $y = 2x + 1/2$ es la asíntota de la curva.

Además $f(x) = \sqrt{\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$; por consiguiente, $f(x) > 2x + 1/2$, es decir, la curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) = -x\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -2$. Es decir, la recta $y = -2x - 1/2$ es otra asíntota de la curva y la curva está por encima de la asíntota.

Variación.

$$f'(x) = \frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

por consiguiente, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$.

Tabla de variación. Los resultados anteriores se resumen en la Tabla 11-7.

TABLA 11-7

x	$-\infty$	$-1/4$	$+\infty$ **R**
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗ $+\infty$

Mínimo: $f(-1/4) = \sqrt{3/2}$.
Punto sobre el eje Y: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$.
Puntos de inflexión. Como

$$f''(x) = \frac{-3(4x^2+1)}{(4x^2+2x+1)} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

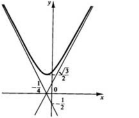


Figura 11-9

esto demuestra que no existen puntos de inflexión. Además, $f'' > 0$ para todo x; por tanto, la curva es cóncava hacia arriba.

Problema 11-11 Estudie la función de **R** en **R** tal que $f(x) = \text{sen } x + 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$.

Solución. *Periodo.* Para todo x, $f(x + 4\pi) = \text{sen }(x + 4\pi) = 2 \text{ sen}\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = f(x)$. Es decir, la función es periódica de periodo 4π. Es posible hallar un número real positivo P más pequeño, tal que $\forall x: f(x + P) = f(x)$.

En efecto,

$$f(x+P) = \operatorname{sen}(x+P) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{P}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cos P + \cos x \operatorname{sen} P + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{P}{2} + $$
$$+ 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{P}{2}$$

De donde

$$\operatorname{sen} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x\cos P + \cos x\operatorname{sen} P + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{P}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{P}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = \operatorname{sen} x(\cos P - 1) + \cos x \operatorname{sen} P + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\cos P - 1) + 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{P}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = -2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2\frac{P}{2} + \cos x\operatorname{sen} P - 4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{P}{4} + 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{P}{2} \Rightarrow 0 = H\operatorname{sen}\frac{P}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{P}{4} = 0 \Rightarrow P = 4k\pi \Rightarrow P = 4\pi$$

Intervalo de estudio. El estudio de la periodicidad muestra que es suficiente estudiar la restricción de f al intervalo $[\alpha_1\ \alpha + 4\pi[$, y como f es impar, se puede considerar el intervalo $[0, 2\pi[$. En los extremos del intervalo $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Variación. Para todo $x: f'(x) = \cos x + \cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4}$. Si $x \in [0, 2\pi[, \cos\frac{x}{4} > 0$. Por otra parte, si $x \in [0, 2\pi[$, entonces $\frac{3x}{4} \in [0, \frac{3\pi}{2}[$; por consiguiente,

$$\cos\frac{3x}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[$$
$$\cos\frac{3x}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}\right[$$

Entonces

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$

TABLA 11-8

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

Tabla de variación. (Vea la Tabla 11-8.)

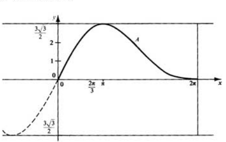


Figura 11-10

Observe que $f'(x)$ se anula para $x = 2\pi$ y $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. La curva representativa se obtiene dibujando el arco para $[0, 2\pi[$. El arco se construye con la ayuda de puntos y tangentes. Por ejemplo,

$$\text{punto } 0: (0, 0, f'(0) = 2)$$
$$\text{punto } A: (\pi, 2, f'(\pi) = -1)$$

Después se construye el arco simétrico con respecto al centro 0.

Puntos de inflexión. Como $f''(x) = -\text{sen } x - \frac{1}{2} \text{sen } \frac{x}{2} = -\text{sen } \frac{x}{2}\left[2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right]$. Entonces sobre $]0, 2\pi[$, la derivada segunda se anula y cambia de signo para x tal que $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 3{,}6$ radianes.

Problema 11-12

Estudie la función f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tal que $f(x) = 2 \cos^2 x + \text{sen } 2x$.

Solución. *Definición.* Para todo x real existe $f(x)$.

Periodicidad. Como $f(x + \pi) = f(x)$, la función es de periodo π.

Intervalo de estudio. La función f no es ni par ni impar. Por tanto, estudiaremos la restricción de f al intervalo $[0, \pi]$.

Variación. La función se puede escribir como $f(x) = 1 + \cos 2x + \text{sen } 2x$. Entonces la función es derivable para todo x y

$$f(x) = -2 \text{ sen } 2x + 2 \cos 2x = 2 (\cos 2x - \text{sen } 2x) = 2\sqrt{2} \text{ sen } \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

En $[0, \pi]$ tenemos que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} \text{ o } x = \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}\right)$$

Tabla de variación. (Vea la Tabla 11-9.)

$$x = 0, f(0) = 2, f'(0) = 2 \qquad x = \frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}, f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$x = \pi, f(\pi) = 2, f'(\pi) = 2 \qquad x = \frac{5\pi}{8}, f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \sqrt{2}, f'\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0$$

TABLA 11-9

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	$1 + \sqrt{2}$	↘	$1 - \sqrt{2}$	↗	2

La tabla muestra que la curva corta el eje X en el intervalo $]0, \pi[$ en dos puntos dados por

$$f(x) = 2 \cos x (\cos x + \text{sen } x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

La curva se obtiene por traslaciones de la curva obtenida para el intervalo $]0, \pi[$.

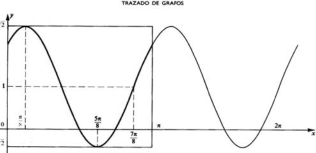


Figura 11-11

Puntos de inflexión. Como

$$f''(x) = -4\cos 2x - 4\,\mathrm{sen}\,2x = -4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

entonces en el intervalo $]0, \pi[$ se halla que $x = \frac{3\pi}{8}$ y $x = \frac{7\pi}{8}$ y además:

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1,\ f'\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -2\sqrt{2} \\ f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 1,\ f'\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Problema 11-13 Estudie la función numérica f tal que $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{2\cos x + 1}$.

Solución. *Definición.* f no está definida si $2\cos x + 1 = 0$, o

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z \\ x = \frac{4\pi}{3} + k' \cdot 2\pi,\ k' \in Z \end{array}\right.$$

Sea S el conjunto de números reales iguales a $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ o $\frac{4\pi}{3} + k' \cdot 2\pi$. Entonces el conjunto de definición de la función es $E = \mathbf{R} - S$.

Periodicidad. Como para todo $x \in E$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, la función es periódica. Entonces es suficiente estudiar la restricción de f a un intervalo I de amplitud 2π, por ejemplo, $[\alpha_1\alpha + 2\pi[$, excluyendo los números que pertenecen a $I \cap S$.

Intervalo de estudio. Para todo $x \in E$, $f(x) = f(-x)m$, entonces la función f es par, luego es suficiente el estudio de la función en un intervalo de amplitud π, por ejemplo, $[0, \pi[$. En ese intervalo el único elemento que hay que excluir es $\frac{2\pi}{3}$. Si hacemos

$$I_1 = \left\{ x \in \mathbf{R} : 0 \le x < \frac{2\pi}{3} \right\} \text{ e } I_2 = \left\{ x \in \mathbf{R} : \frac{2\pi}{3} < x \le \pi \right\}$$

estudiaremos la restricción de f al conjunto $E_1 = I_1 \cup I_2$.

Variación. Sobre el conjunto E la función es derivable y

$$f'(x) = \frac{(2\cos x + 1)(-\operatorname{sen} x) - (\cos x - 1)(-2\operatorname{sen} x)}{(2\cos x + 1)^2}$$

Sobre el conjunto E, sen $x \geq 0$; entonces $f'(x) \leq 0$.
La función f es decreciente sobre cada uno de los intervalos I_1 e I_2.
Estudio en los extremos del intervalo. Si $x = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$; si $x = \pi$, $f(\pi) = 2$, $f'(\pi) = 0$; si

$$x \to \frac{2\pi}{3},\ \lim (\cos x - 1) = -\frac{3}{2} \text{ y } \lim (2\cos x + 1) = 0, \quad \therefore \lim_{x \to \frac{2\pi}{3}} f(x) = \infty$$

De donde resulta que la ecuación $x = \frac{2\pi}{3}$ es una asíntota de la curva de ecuación $y = f(x)$.

Tabla de variación. Los resultados anteriores se pueden resumir en la Tabla 11-10.

TABLA 11-10

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 2$

Representación gráfica. La representación gráfica de la restricción de f al conjunto E_1 se obtiene construyendo algunos puntos y sus tangentes. Por ejemplo, tenemos en el punto 0, el punto A, el punto B $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = -1, y' = -3\right)$. Por tanto, la representación gráfica de la función se obtiene haciendo una simetría con respecto al eje Y y traslaciones de esta parte de curva a los demás intervalos.

Se deja como ejercicio el estudio de la concavidad y puntos de inflexión.

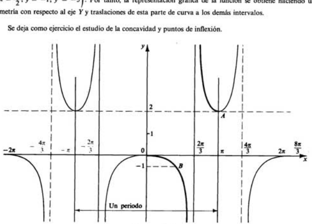


Figura 11-12

Problema 11-14 Discuta el grafo de la función $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. (Vea Fig. 11-13.)

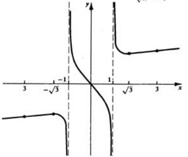


Figura 11-13

Solución. *Dominio de definición.* La función existe en todas partes, menos en los puntos $x = \pm 1$.

Simetría. La función es impar, por lo que el grafo de la misma será simétrico con respecto a 0.

Intersecciones. La curva corta el eje de las Y en 0.

Valores críticos. $y' = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, $y'' = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$. Las derivadas y' y y'' no existen en $x = \pm 1$.

Como $y' = 0$ para $x = \pm\sqrt{3}$, $y'' = 0$ para $x = 0$ y $x = \pm 3$.

De esta forma y' conserva constante el signo en cada uno de los intervalos $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, \sqrt{3}[$ y $]\sqrt{3}, +\infty[$; y y'' en $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 3[$ y $]3, +\infty[$.

La Tabla 11-11 muestra el estudio de los signos de y' y y'', y los máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc.

TABLA 11-11

x	0	$]0,1[$	1	$]1, \sqrt{3}[$	$\sqrt{3} \approx 1,73$	$]\sqrt{3}, 3[$	3	$]3, +\infty[$
y	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,37$	$+$	1,5	$+$
y'	$-$	$-$	no existe	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	1	$-$	no existe	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Conclusiones	Punto de inflexión	La función decrece; el grafo es cóncavo hacia abajo	Punto de discontinuidad	La función decrece; el grafo es cóncavo hacia arriba	Punto mínimo	La función crece; el grafo es cóncavo hacia arriba	Punto de inflexión	La función crece; el grafo es cóncavo hacia arriba

Como la función es impar, es suficiente hacer cálculos para $x \geq 0$; la mitad izquierda del grafo se reconstruye por el principio de la simetría impar.

Asíntotas oblicuas. Como $k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0$, $b_1 = \lim_{x \to +\infty} y = \infty$, no existe asíntota oblicua a la derecha, y como el grafo es simétrico, tampoco existirá asíntota oblicua a la izquierda.

Asíntotas verticales. Los puntos de discontinuidad son $x = -1$ y $x = 1$, y $\lim_{x \to 1} y = \mp\infty$; por consiguiente, las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales del grafo.

Problema 11-15 Construya el grafo de la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución. *Dominio de definición.* Es $0 < x < +\infty$.

Simetría. No existe.
Intersecciones. Como $y = 0 \Rightarrow x = 1$, $x = 1$ es la única intersección con los ejes.

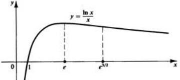


Figura 11-14

Valores críticos. $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$, lo que muestra que y' y y'' existen en $0 < x < +\infty$. Además, $y' = 0$ si $\ln x = 1$, es decir, cuando $x = e$; $y'' = 0$ si $\ln x = 3/2$, es decir, cuando $x = e^{3/2}$.

La Tabla 11-12 muestra los máximos y mínimos, puntos de inflexión, etc.

TABLA 11-12

x	0	$]0, 1[$	1	$]1, e[$	$e \approx 2{,}72$	$]e, \frac{3}{e^2}[$	$e^{3/2} \approx 4{,}49$	$]e^{3/2}, +\infty[$
y	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}37$	$+$	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx 0{,}33$	$+$
y'	no existe	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	no existe	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Conclusiones	Puntofrontera del campo de existencia de la función asíntota vertical	La función crece; el grafo es cóncavo hacia abajo	Punto de intersección del grafo con el eje 0x	La función crece; el grafo es cóncavo hacia abajo	Punto máximo de la función	La función decrece; el grafo es cóncavo hacia abajo	Punto de inflexión	La función decrece; el grafo es cóncavo hacia arriba

Asíntotas. En el dominio de la función no hay puntos de discontinuidad; pero si en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical:

La asíntota oblicua a la derecha u horizontal (ya que la asíntota oblicua a la izquierda no existe, puesto que no es posible que $x \to -\infty$) es: $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 0$, $b = \lim_{x\to+\infty} y = 0$. Por tanto, la asíntota horizontal derecha es el eje de las x.

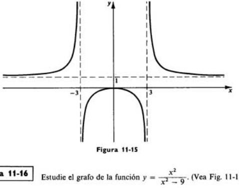


Figura 11-15

Problema 11-16 Estudie el grafo de la función $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$. (Vea Fig. 11-15.)

Solución. *Dominio de definición.* El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{3, -3\}$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje de las y.

Intersecciones. El grafo no corta ninguno de los ejes.

Asíntotas. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = 1$ y $y = 1$ es una asíntota horizontal. Como $y > 1$ para x suficientemente grande, el grafo se aproxima por encima a la asíntota.

$\lim_{x\to\pm 3} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \pm\infty$ y $\underset{x=-3}{x = 3}$ son asíntotas. Ahora, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2 - 9} = +\infty$, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2 - 9} = -\infty$, es decir, el valor de y es muy grande.

Valores críticos. $y' = -\frac{18x}{(x^2 - 9)^2}$, por tanto, $x = 0$ en un punto crítico. $y'' = \frac{18(3x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^3}$, entonces $x = 0$ es un máximo local. No existen puntos de inflexión.

Problema 11-17 Estudie el grafo de la función $y = \frac{-x}{x^2 + 1}$. (Vea Fig. 11-16.)

Solución. *Dominio de definición.* El dominio de la función es $\mathbf{R}$.

Simetría. Al remplazar $-x$ por x y y por $-y$ se encuentra que la función es simétrica respecto al origen.

Intersecciones. La función corta el eje de las x en $x = 0$.

Asíntotas. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$. El eje de las x es una asíntota. Como $x \to \infty$, y se aproxima a 0 por la parte negativa, y la curva está por debajo del eje X; si $x \to -\infty$ está por encima del eje X. No existen asíntotas verticales.

Valores críticos.

$$y' = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, \; y'' = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Entonces $x = -1$ es un máximo; $x = 1$, un mínimo; $x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, son puntos de inflexión.

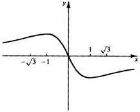


Figura 11-16

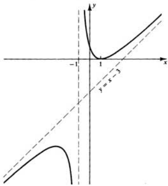


Figura 11-17

Problema 11-18 Estudie el grafo de la función $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)}$. (Vea Fig. 11-17.)

Solución. *Dominio de definición.* El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{1\}$.

Simetría. No es simétrica.

Intersecciones. Cuando $x = 1$, $y = 0$.

Asíntotas. $\lim_{x \to -1} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \pm\infty$.

Observe que y es grande y positiva para $x > -1$ y pequeña para $x < -1$. Como $\frac{(x-1)^2}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$ para x suficientemente grande, $\frac{4}{x+1}$ es insignificante y $y = x - 3$ es una asíntota.

Como $\frac{4}{x+1}$ es positivo para x positivo y negativo para x negativo, el grafo está por encima de $y = x - 3$ cuando $x \to \infty$ y por debajo cuando $x \to -\infty$.

Valores críticos. $y' = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$, $y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$. Entonces $x = 1$ es un mínimo local, $x = -3$ un máximo local. No existen puntos de inflexión. Cuando $x = 1$, $y = 0$.

Problema 11-19 Dibuje el grafo de $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

Solución. *Dominio de definición.* El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{1\}$.

Simetría. No es simétrica.

Intersecciones. Pasa por el origen.

Asíntotas. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$, y $y = 1$ es una asíntota, y es siempre positiva $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$. Entonces $x = 1$ es una asíntota. y es muy grande en ambos lados de la asíntota. Si $x \to \infty$, $\frac{x^2}{(x-1)^2} > 1$ y si $x \to -\infty$ $\frac{x^2}{(x-1)^2} < 1$.

Valores críticos. $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$, $y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$. $x = 0$ es un mínimo, $x = \frac{1}{2}$ es un punto de inflexión.

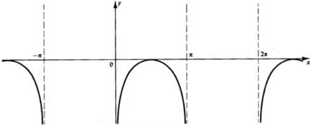


Figura 11-18

Problema 11-20

Dibuje el grafo de la función ln sen x. (Vea Fig. 11-18.)

Solución. *Dominio de definición.* El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{\text{sen } k\pi\}$.

Simetría. No existe.

Intersecciones. No existen.

Asíntotas. $\lim_{x \to n\pi} \ln \text{sen } x = -\infty$, y las rectas $x = \pm n\pi$ son asíntotas verticales, para n entero.

Valores críticos. $y' = \cot g\, x$; $y'' = -\text{cosec}^2\, x$; $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, son máximos locales, $y'' \neq 0$ y no existen puntos de inflexión; $y' = 0$ en $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, el grafo no existe en estos puntos.

Problema 11-21

Halle las asíntotas horizontales del grafo de la función f definida por $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. (Vea Fig. 11-19.)

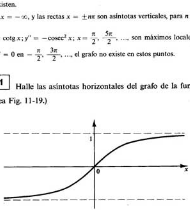


Figura 11-19

Solución. Considere $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Para calcular este límite se escribe $x = \sqrt{x^2}$ ($x > 0$, porque $x \to \infty$). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}} = 1$$

Según *a'*) de la definición (pág. 257), la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. Si consideramos $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y escribimos $x = -\sqrt{x^2}$, puesto que $x \to -\infty$, $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{1}{1+1/x^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\lim_{x\to-\infty} 1/x^2}} = -1$$

Según *b'*) de la misma definición, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

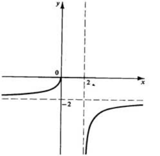


Figura 11-20. Grafo de f_2

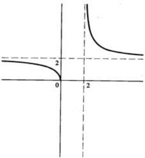


Figura 11-21. Grafo de f_1

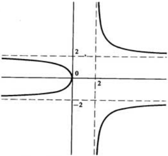


Figura 11-22. Grafo de la relación

Problema 11-22 Halle las asíntotas horizontales y verticales del grafo de la relación $xy^2 - 2y^2 - 4x = 0$.

Solución. La relación $y = \pm 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ define dos funciones:

$$y = f_1(x) \text{ definida por } f_1(x) = +2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

y

$$y = f_2(x) \text{ definida por } f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

El grafo de la relación está formado por los de las dos funciones.

Como $\lim_{x\to 2^+} f_1(x) = \lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \infty$, por la definición *a*) (pág. 257), la recta $x = 2$ es una asíntota vertical del grafo de f_1

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 2$$

Según *a'*) de la misma definición, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal del grafo de f_1.

Análogamente, $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 2$. Como $\lim_{x\to 2^+} f_2(x) = \lim_{x\to 2^+} \left[-2\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right] = -\infty$, por *b*) de la misma definición, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical del grafo de f_2.

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} \left[-2\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[-2\sqrt{\frac{1}{1-2/x}}\right] = -2 \Rightarrow y = -2$$

es una asíntota horizontal del grafo de f_2. (Vea Figs. 11-20, 11-21 y 11-22.)

APENDICE A

Algebra

Leyes fundamentales

a) Ley conmutativa: $a + b = b + a$; $ab = ba$.
b) Ley asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a(bc) = (ab)c$.
c) Ley distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Leyes de exponentes

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$(ab)^x = a^x \cdot b^x$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$a^0 = 1$, si a es diferente de cero.
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$
$a^{1/y} = \sqrt[y]{a}$

Números complejos (un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales)

$$i = \sqrt{-1};\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i$$

$$a + bi = c + di, \text{ si, y solo si, } a = c \text{ y } d = b$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + ci) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + di)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Teorema del binomio (para n, número entero positivo)

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)n$.

Intereses y anualidades

Monto. Un capital P colocado a un tanto por ciento de intereses R por n años acumula un monto A_n, comó sigue:

A interés simple: $A_n = P(1 + nR)$.

A interés compuesto anualmente: $A_n = P(1 + R)^n$.

A interés compuesto Q veces en un año: $A_n = P\left(1 + \frac{R}{Q}\right)^n$

Interés simple. Para un capital P, por n años, a un tanto por ciento R, el interés simple I es

$$I = PnR$$

Interés compuesto. Para un capital P, por n años, a un tanto por ciento R, el interés compuesto es igual a

$$I = P[(1 + R)^n - 1]$$

Monto de una anualidad. Si una anualidad P es depositada al fin de cada año sucesivamente (comenzando en el momento del pago), y el interés al tanto por ciento R compuesto anualmente se paga sobre el depósito acumulado al fin da cada año, la cantidad total N acumulada al fin de n años es

$$N = P \cdot \frac{(1 + R)^n - 1}{R}$$

N es llamado el monto de la anualidad P.

Valor actual de una anualidad. El monto total actual P que suministrará una anualidad N al fin de cada año durante n años (comenzando un año después) es

$$P = N \cdot \frac{1 - (1 + R)^{-n}}{R}$$

P se llama el valor actual de una anualidad.

Factores y desarrollos

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

$a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}\,ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\,ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$ para valores de n pares

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ para valores impares de n

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc$

$(a + b + c + d + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + 2a(b + c + d + \dots) + 2b(c + d + {}$
$+ \dots) + 2c(d + \dots) + \dots$

Suma de números

Suma de los primeros n números:

$$\sum (n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma de los cuadrados de los n primeros números:

$$\sum (n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma de los cubos de los primeros n números:

$$\sum (n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Progresión aritmética

Si a es el primer término, k el último, d la diferencia común, n el número de términos y S la suma de n términos,

$$k = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S = \frac{n}{2}(a + k)$$

Progresión geométrica

Si a es el primer término, k el último, r la razón común, n el número de términos y S la suma de n términos,

$$k = ar^{n-1}$$

$$S = a\frac{(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$S = a\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S = \frac{kr - a}{r - 1}$$

Si n es infinito y r^2 es menor que la unidad,

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Factoriales

$n! = e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, aproximadamente.

Permutaciones

Si M denota el número de permutaciones de n cosas, tomando p a un tiempo,

$$M = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$$

Combinaciones

Si M denota el número de combinaciones de n cosas, tomando p a un tiempo,

$$M = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^4 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz es imaginaria.
Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son iguales y reales.
Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales y distintas.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación cúbica

Una ecuación cúbica de la forma $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ puede reducirse a

$$x^3 + ax + b = 0$$

sustituyendo a y por el valor $\left(x - \frac{p}{3}\right)$. De aquí se deduce

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2)\,; \qquad b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$$

Para la solución se toma

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\,; \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Los valores de x están dados por

$$x = A + B = -\frac{A+B}{2} + \frac{(A-B)}{2}\sqrt{-3} = -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}$$

Si $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} > 0$, habrá una raíz real y dos conjugadas imaginarias.

Si $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = 0$, habrá tres raíces reales, de las cuales dos al menos son iguales.

Si $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0$, habrá tres raíces reales y distintas.

Para el último caso se usa una solución trigonométrica. Se calcula el valor del ángulo Φ en la expresión

$$\cos\Phi = -\frac{b}{2} : \sqrt{\left(-\frac{a^3}{27}\right)}$$

Entonces x tendrá los siguientes valores:

$$\mp \sqrt{-\frac{a}{3}\cos\Phi}$$

$$\mp 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\Phi}{3}+120°\right)$$

$$\mp 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\Phi}{3}+240°\right)$$

Si a y b son cantidades pequeñas, las siguientes relaciones son muy aproximadas:

$$(1 \pm a)^m = 1 \pm ma$$

$$(1 \pm a)^m(1 \pm b)^n = 1 \pm ma \pm nb$$

Si n es aproximadamente igual a m,

$$\sqrt{nm} = \frac{n+m}{2}, \text{ aproximadamente}$$

Si θ es muy pequeño y está expresado en radianes,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \text{ y } \frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta} = 1, \text{ aproximadamente}$$

Determinantes de segundo y tercer orden

El símbolo $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ formado por dos filas y dos columnas de números y por una línea vertical a cada lado, se llama un determinante de segundo orden. Cada número de una columna o fila se llama elemento. La expresión $a_1b_2 - a_2b_1$ es llamada desarrollo del determinante.

El valor de un determinante de segundo orden se obtiene tomando el producto de los números en diagonal, partiendo de izquierda hacia abajo y restando el producto de los números en la diagonal de la izquierda hacia arriba.

La expresión $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ es llamada determinante de tercer orden.

El siguiente método sirve para obtener el desarrollo del determinante:

1. Se escribe la primera y segunda columna del determinante a la derecha del mismo, tal como se indica a continuación:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$

2. Se forma el producto de los números en cada diagonal empezando de izquierda hacia abajo y haciendo cada producto positivo.

3. Se forma el producto de los números en cada diagonal empezando de izquierda hacia arriba y haciendo cada producto negativo.

4. Los seis términos así formados dan el desarrollo del determinante.

APENDICE B

Cálculo

Desarrollos en serie

Serie de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n!$$

En donde $f(x)$ es cualquier función continua, a es cualquier cantidad para la cual $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ ... son finitos. Si la serie se usa para aproximar $f(x)$ para algún valor de x, entonces a debe ser tomado de modo que la diferencia entre $x - a$ sea numéricamente muy pequeña. El residuo después de n términos es

$$R_n = f^{(n)}(x_1)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}, \text{ en donde } x_1 \text{ está entre } a \text{ y } x.$$

Serie de Maclaurin

En la serie anterior, si $a = 0$, se tiene la serie de Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

Funciones binomiales

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots (y^2 < x^2)$$

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{2!} + \ldots (x^2 < 1)$$

Funciones exponenciales

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!} + \ldots$$

Funciones logarítmicas

$$\log_e x = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \dots \left(x > \frac{1}{2}\right)$$

$$\log_e x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots (2 > x > 0)$$

$$\log_e x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right] (x > 0)$$

$$\log_e (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots (-1 < x < 1)$$

$$\log_e (n+1) - \log_e (n-1) = 2\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \dots\right]$$

$$\log_e (a+x) = \log_e a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \dots\right]$$

$$(a > 0, -a < x < +\infty)$$

Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots (x^2 < 1)$$

$$\operatorname{art\,tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots (x^2 < 1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots (x^2 < 1)$$

$$\log_e \operatorname{sen} x = \log_e x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots (x^2 < \pi^2)$$

$$\log_e \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\log_e \operatorname{tg} x = \log_e x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \dots \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \dots$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \dots\right)$$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \dots \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

DIFERENCIALES

$d\,ax = a dx$

$d\,(u + v) = du + dv$

$d\,uv = udv + vdu$

$d\,\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$d\,x^n = n\,x^{n-1}dx$

$d\,x^y = yx^{y-1}dx + x^y \log_e x\,dy$

$d\,e^x = e^x\,dx$

$d\,e^{ax} = a\,e^{ax}dx$

$d\,a^x = a^x \log_e a\,dx$

$d\,\log_e x = x^{-1}dx$

$d\,\log_a x = x^{-1} \log_a e\,dx$

$d\,x^x = x^x(1 + \log_e x)\,dx$

DERIVADAS

$d \operatorname{sen} x = \cos x\,dx$

$d \cos x = -\operatorname{sen} x\,dx$

$d \operatorname{tg} x = \sec^2 x\,dx$

$d \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$d \sec x = \operatorname{tg} x \sec x\,dx$

$d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x\,dx$

$d \operatorname{vers} x = \operatorname{sen} x\,dx$

$d \operatorname{arc\,sen} x = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,cos} x = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,tg} x = (1 + x^2)^{-1}dx$

$d \operatorname{arc\,cotg} x = -(1 + x^2)^{-1}dx$

$d \operatorname{arc\,sec} x = x^{-1}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,cosec} x = -x^{-1}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,vers} x = (2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{senh} x = \cosh x\,dx$

$d \cosh x = \operatorname{senh} x\,dx$

$d \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x\,dx$

$d \operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cosech}^2 x\,dx$

$d \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x\,dx$

$d \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x\,dx$

$d \operatorname{arc\,senh} x = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,cosh} x = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,tgh} x = (1 - x^2)^{-1}dx$

$d \operatorname{arc\,cotgh} x = -(x^2 - 1)^{-1}dx$

$d \operatorname{arc\,sech} x = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

$d \operatorname{arc\,cosech} x = -x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}dx$

NOMENCLATURA

$f(x)$	función de x
$f'(x)$	derivada de $f(x)$ con respecto a x o también $\frac{dy}{dx}$
$\log x$	logaritmo decimal de x
$\ln x$	logaritmo neperiano de x
$\log_{10} x$	logaritmo en base diez de x
$\log_e x$	logaritmo en base e de x
$\log_a x$	logaritmo en base a de x
sen x	seno de x
cos x	coseno de x
tg x	tangente de x
cotg x	cotangente de x
sec x	secante de x
cosec x	cosecante de x
vers x	verseno de x
covers x	coverseno de x
arc sen x	ángulo cuyo seno es x
arc cos x	ángulo cuyo coseno es x
arc tg x	ángulo cuya tangente es x
arc cot x	ángulo cuya cotangente es x
arc sec x	ángulo cuya secante es x
arc cosec x	ángulo cuya cosecante es x
senh x	seno hiperbólico de x
cosh x	coseno hiperbólico de x
tgh x	tangente hiperbólica de x
cotgh x	cotangente hiperbólica de x
sech x	secante hiperbólica de x
cosech x	cosecante hiperbólica de x
arc senh x	función cuyo seno hiperbólico es x
arc cosh x	función cuyo coseno hiperbólico es x
arc tgh x	función cuya tangente hiperbólica es x
arc cotgh x	función cuya cotangente hiperbólica es x
arc sech x	función cuya secante hiperbólica es x
arc cosech x	función cuya cosecante hiperbólica es x

APENDICE C

Geometría

a, b, c, d y s longitudes, A áreas, V volúmenes.

Círculo

C = circunferencia
R = radio
D = diámetro
A = área
h = sagita
$C = 2\pi R = \pi D$
$S = R\theta = \frac{1}{2} D\theta = D \text{ arc cos } \frac{d}{R}$
$L = 2\sqrt{R^2 - d^2}$
$d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L^2}$
$h = R - d$
S = longitud de arco subtendido por el ángulo
L = longitud de la cuerda subtendida por el arco S
θ = ángulo central en radianes

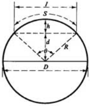


Figura C-1

Cubo

$V = a^3$; $d = a\sqrt{3}$
A (superficie total) $= 6a^2$,

siendo a y d las longitudes del lado y la diagonal respectivamente.

Elipse

$A = \pi ab$, siendo a y b longitudes de los semiejes mayor y menor respectivamente.

Esfera

A (esfera) $= 4\pi R^2 = \pi D^2 = 12{,}57\, R^2$
A (zona) $= 2\pi R h_1 = \pi D h_1$
A (luna) $= 2R^2\theta$, siendo θ un ángulo en radianes de la luna

$V\text{ (esfera)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6} = 4{,}189\ R^3$

$V\text{ (sector esférico)} = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1 = \frac{1}{6}\pi D^2 h_1$

V (segmento esférico de una sola base) =

$= \frac{\pi}{6}\cdot h_3\,(3r_3^2 + h_3^2)$

V (segmento esférico de dos bases) =

$= \frac{1}{6}\pi h_2\,(3r_3^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$

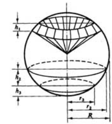


Figura C-2

Paralelepípedo rectángulo

$V = abc;\ d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

A (superficie total) $= 2\,(ab + bc + ca)$,

siendo a, b y c las longitudes de los lados y d la longitud de la diagonal.

Paralelogramo

$A = a\cdot h = ab \operatorname{sen}\theta$, donde a y b indican las longitudes de los lados, h la longitud de la altura y θ el ángulo entre los lados.

Pirámide o cono

$V = \frac{1}{3}$ (área de la base) (altura)

A (lateral de la pirámide o cono regular) $= \frac{1}{2}$ (perímetro de la base) (apotema)

Polígono regular de n lados

$A = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg}\frac{180°}{n}$, donde a es la longitud del lado.

$A\text{ (círculo)} = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} = 0{,}7854\ D^2$

$A\text{ (sector)} = \frac{1}{2} RS = \frac{1}{2} R^2\theta$

$A\text{ (segmento)} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \operatorname{sen}\theta)$

Perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo $= 2\,nR \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$

$A\text{ (polígono inscrito)} = \frac{1}{2} nR^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$

Perímetro de un polígono regular de n lados circunscrito a un círculo $= 2\,nR \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$

$A\text{ (polígono circunscrito)} = nR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$

Radio de un círculo inscrito en un triángulo de lados a, b, c,

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}; \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Radio del círculo circunscrito a un triángulo

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$R = \dfrac{a}{2} \operatorname{cosec} \dfrac{180^\circ}{n}$, donde R es el radio del círculo circunscrito

$r = \dfrac{a}{2} \operatorname{cotg} \dfrac{180^\circ}{n}$, donde r es el radio del círculo inscrito

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

$$\beta = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

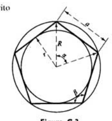


Figura C-3

Prisma o cilindro

V = área de la base por la altura
A (lateral) = perímetro de la sección recta por la arista lateral.

APENDICE D

Geometría analítica plana

Distancia entre dos puntos

Puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), utilizando coordenadas rectangulares

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), utilizando coordenadas polares

$$d = +\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Pendiente de una recta

La pendiente de la recta por los puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$, es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Coordenadas del punto medio

Para el punto medio de $P_1\,P_2$

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Angulo θ entre dos líneas de pendientes m_1 y m_2

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Para líneas paralelas $m_1 = m_2$

Para líneas perpendiculares $m_1 m_2 = -1$

Area de un triángulo

Si es en coordenadas rectangulares, los vértices son $(x_1, y_1)\,(x_2, y_2)$ y (x_3, y_3), y el área será

$$A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

Para coordenadas polares y vértices (r_1, θ_1); (r_2, θ_2); (r_3, θ_3) el área será

$$A = \frac{1}{2}\left[r_1 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_3)\right]$$

Cuatro formas de la ecuación de una recta

a) $Ax + By + C = 0$ (forma general)
b) $y - y_1 = m(x - x_1)$ (forma punto pendiente)
c) $y = mx + b$ (forma pendiente intersección)
d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (forma intersecciones)

Ecuaciones cónicas

a) *Círculo.* Si tiene su centro en (h, k) y un radio r,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si el centro está en el origen,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuación polar de un círculo con el origen sobre la circunferencia y su centro en el punto c, α, será

$$r = 2c \cos(\theta - \alpha)$$

Si el origen no está sobre la circunferencia, el radio es a y el centro está en un punto l, a, la ecuación es

$$a^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos(\theta - a)$$

b) *Elipse.* Centro en (h, k) y semiejes a, b:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

siendo a el semieje mayor. Si el origen está en el centro la ecuación se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La ecuación polar cuando el polo está en el centro es

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

c) *Hipérbola.*

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

siendo (h, k) el centro, y de ejes paralelos a los ejes de coordenadas y el eje transverso horizontal. Si el centro está en el origen, la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo a el semieje transverso y b el semieje conjugado (vertical). La ecuación polar que tiene el centro en el polo es

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta}$$

Hipérbola equilátera.

$$xy = C$$

Cuando tiene centro en el origen y por asíntotas los ejes de coordenadas.

d) *Parábola.* Si tiene su vértice en (h, k) y el foco en $(h + p, k)$, su ecuación es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si el vértice está en el origen, la ecuación es

$$y^2 = 4px$$

La ecuación polar cuando el foco está en el polo y p es el «semilatus rectum» es

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta}$$

Si el vértice está en el polo y p tiene el mismo significado que antes, la ecuación será

$$r = \frac{2p\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Relaciones entre coordenadas polares y rectangulares

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Transformación de coordenadas

Para transformar una ecuación de un sistema de coordenadas x, y a otro x', y' se sustituye cada variable en términos de las variables del nuevo sistema.

a) *Sistema rectangular.* Ejes originales paralelos a los ejes primitivos. Las coordenadas del nuevo origen en términos del sistema original, son (h, k)

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

b) *Sistema rectangular.* El origen de las coordenadas iniciales coincide con el nuevo origen y el eje x' hace un ángulo θ con el eje X

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

c) *Sistema rectangular.* Los ejes iniciales no son paralelos con los nuevos ejes. El nuevo origen está en h, k del sistema original

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta + h$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta + k$$

APENDICE E

Geometría analítica del espacio

Distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Parámetros y cosenos directores

a) Números *a*, *b* y *c* tales que $\dfrac{x_2 - x_1}{a} = \dfrac{y_2 - y_1}{b} = \dfrac{z_2 - z_1}{c}$, son llamados parámetros directores de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

b) Para una recta cuyos parámetros directores son *a*, *b* y *c*, los cosenos directores (los cosenos de los ángulos que forman las rectas con los ejes de coordenadas) son:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Dos formas de la ecuación de un plano

a) $Ax + By + Cz + D = 0$ (forma general)
b) $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ [plano por $P_1, (x_1, y_1, z_1)$]

En *a)* y *b)* los coeficientes *A*, *B* y *C* son parámetros directores de una recta perpendicular al plano.

APENDICE F

Trigonometría

Identidades fundamentales

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta; \ \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Fórmulas de reducción

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \qquad \operatorname{tg}\ (90 \pm \alpha) = \mp \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \qquad \operatorname{sen}(180 \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \qquad \cos(180 \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha \qquad \operatorname{tg}(180 \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{sen}(90 \pm \alpha) = \cos \alpha \qquad \operatorname{sen}(360 \pm \alpha) = \pm \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(90 \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen} \alpha \qquad \cos(360 \pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360 \pm \alpha) = + \operatorname{tg} \alpha$$

Funciones de suma y diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Relaciones entre funciones de 2α y α

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Suma y diferencia de funciones

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

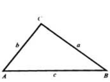
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Teorema del seno

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{n}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Teorema del coseno

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Teorema de la tangente

En cualquier triángulo, la diferencia de dos lados cualesquiera es a su suma como la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos es a la tangente de la mitad de su suma.

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

Relaciones entre funciones recíprocas

$$\operatorname{arc\,sen} a = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - a^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{a}$$

$$\operatorname{arc\,cos} a = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1 - a^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} = \operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$\operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,sen} \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \operatorname{arc\,cosec} \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$$

TABLA F-1. Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

TABLA F-2. Variación de las funciones trigonométricas

Cuadrante	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	$0 \to +1$	$+1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$	$+1 \to +\infty$	$+\infty \to +1$
II	$+1 \to 0$	$0 \to -1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$	$-\infty \to -1$	$+1 \to +\infty$
III	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$	$-1 \to -\infty$	$-\infty \to -1$
IV	$-1 \to 0$	$0 \to +1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$	$+\infty \to +1$	$-1 \to -\infty$

TABLA F-3. Angulos más utilizados y sus funciones

$\theta°$	θ en radianes	sen θ	cos θ	tg θ	cotg θ	sec θ	cosec θ
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\pi/6$	$^1/_2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$^1/_2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	0	∞	0	∞	1
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-^1/_2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$^1/_2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
180°	π	0	-1	0	∞	-1	∞
210°	$7\pi/6$	$-^1/_2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$-^1/_2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	-2	$-2\sqrt{3}/3$
270°	$3\pi/2$	-1	0	∞	0	∞	-1
300°	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$^1/_2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2\sqrt{3}/3$
315°	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-^1/_2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	-2
360°	2π	0	1	0	∞	1	∞

Lista de símbolos

$=$	Igual a...
$\{\ \}$	Las dos llaves se usan para indicar un conjunto, por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$.
$\in$	Pertenece a ...
$\notin$	No pertenece a ...
$\subseteq$	Es subconjunto de ...; está contenido en ...
$\not\subseteq$	No es subconjunto de; no está contenido en ...
$\subset$	Es subconjunto propio de ...
ϕ	El conjunto vacío; parte vacía.
$\Rightarrow$	Implicación; entonces. (Si p y q son proposiciones, $p \Rightarrow q$ se lee p implica q.)
$\Leftrightarrow$	Equivalencia; si, y solamente si. (Si p y q son proposiciones, $p \Leftrightarrow q$ se lee p equivale a q.)
$\cup$	Unión; reunión.
$\cap$	Intersección.
$\complement_E A$	Complemento de A con respecto a E.
$\mathscr{P}(E)$	Conjunto de las partes de E.
$\forall$	Cuantificador universal.
$\exists$	Cuantificador existencial.
$\times$	Producto cartesiano de dos conjuntos.
Σ	Símbolo de sumatoria.
Π	Símbolo de producto.
$\geq$	Mayor o igual que.
$\leq$	Menor o igual que.
$<$	Menor que.
$\nless$	No es menor que.
$\approx$	Aproximadamente.
$[a, b]$	Intervalo cerrado.
$]a, b[$	Intervalo abierto.
$[a, b[$	Intervalo semiabierto a la derecha.
$]a, b]$	Intervalo semiabierto a la izquierda.
$+\infty$	Más infinito.
$-\infty$	Menos infinito.
$]a, +\infty[$	Intervalo abierto cuyos elementos son $\{x : a < x\}$.
$[a, +\infty[$	Intervalo cerrado en a cuyos elementos son $\{x : a \leq x\}$.

$]-\infty, a[$	Intervalo abierto cuyos elementos son $\{x : x < a\}$.
$]-\infty, a]$	Intervalo cerrado en a cuyos elementos son $\{x : x \leq a\}$.
$\|\ldots\|$	Valor absoluto de ...
(x, y)	Pareja ordenada x, y.
$f(x)$	f de x o el valor de la función f en el punto x.
$\mathscr{D}_f$	Dominio de f, o sea, el conjunto donde f toma sus valores.
$f + g$	f más g [es la función que asigna a cualquier $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ el número $f(x) + g(x)$].
$f - g$	f menos g [es la función que asigna a cualquier $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ el número $f(x) - g(x)$].
$f \cdot g$	f por g [es la función que asigna a cualquier $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ el número $f(x) \cdot g(x)$].
f/g	f dividida por g [es la función que asigna a cualquier $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \cap \{x : (x) \neq 0\}$ el número $f(x)/g(x)$].
$f \circ g$	Compuesta de f y g [es la función que asigna a $x \in \mathscr{D}_g \cap \{x : g(x) \in \mathscr{D}_f\}$ el número $f(g(x))$.
f^{-1}	Función recíproca de f.
I	Función idéntica [definida por la fórmula $I(x) = x$].
$V_r(a)$	Entorno de centro a y radio r.
$V_r^*(a)$	Entorno de centro a, radio r y al cual no pertenece el punto a.
$\lim_{x \to x_0} f(x)$	Limite de f cuando x tiende a x_0.
Δx	Delta x o incremento de x.
Δy	Delta y o incremento de y.
$f(a, h)$	Incremento de f de a a $a + h$ o $f(a + h) - f(a)$.
$df_x(h)$	Diferencial de f en x.
f', $\dfrac{dy}{dx}$, Df, df, $D_x f$	Derivada de f o f prima.
$f'(x_0)$	Derivada de f en x_0 o $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
$\max S$	Máximo de S.
$\min S$	Mínimo de S.
$\sup S$	Supremum de S o mayorante mínimo de S; extremo superior.
$\inf S$	Infimum de S o minorante máximo de S; extremo inferior.
$\therefore$	Por tanto.

Glosario de definiciones y teoremas

1. Definición. El conjunto que no tiene elementos se llama el conjunto vacío y se representa por ϕ.

2. Definición. Un conjunto A se dice subconjunto de un conjunto B si todo elemento de A es elemento de B; se escribe $A \subseteq B$. En caso de que la inclusión sea estricta se habla de subconjunto propio.

3. Definición. Se dice que una relación R entre los elementos de un conjunto E es reflexiva si para todo $x \in E$ se tiene

$$xRx$$

es decir, todo elemento x está relacionado consigo mismo.

4. Definición. Se dice que una relación R entre los elementos x y y de un conjunto E es simétrica si

$$xRy \Rightarrow yRx$$

5. Definición. Se dice que una relación R entre los elementos x, y y z de un conjunto E es transitiva si

$$(xRy \ \text{ y } \ yRz) \Rightarrow xRz$$

6. Definición. Sean A y B dos conjuntos. Se define el producto cartesiano de A y B, escrito $A \times B$, como el conjunto de todas las parejas (x, y) con $x \in A$ y $y \in B$. Esto es,

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \ \text{ y } \ y \in B\}$$

7. Definición. Una relación R es un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos.

8. Definición. Dados dos conjuntos A y B se llama unión de A y B, que se escribe $A \cup B$, el conjunto

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

9. Definición. Dados dos conjuntos A y B se llama intersección de A y B el conjunto de los elementos que están en A y en B. Esto es,

$$\forall \cap B = \{x \colon x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$

10. Definición. Dados dos conjuntos A y B y $A \subseteq B$ se llama complemento de A con respecto a B el conjunto de los x tales que x no está en A y x está en B. Esto es,

$$\complement_B A = \{x \colon x \notin A \ \text{ y } \ x \in B\}$$

11. Definición. Se llama diferencia de los conjuntos A y B el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B. Esto es,

$$A - B = \{x \colon x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}$$

12. Definición. Se llama diferencia simétrica de los conjuntos A y B el conjunto definido por

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

13. Definición. Se dice que una relación R en un conjunto E es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

14. Definición. Se dice que una relación R es una relación de orden en E si verifica las siguientes condiciones:

1. (xRx). Reflexiva.
2. $(xRy \text{ y } yRx) \Rightarrow x = y$. Antisimétrica.
3. $(xRy \text{ y } yRz) \Rightarrow xRz$. Transitiva.

15. Definición. Se dice que un conjunto E es totalmente ordenado si es ordenado por R y si, además, dos elementos cualesquiera a, b de E son comparables:

$$a, b \in E: \ aRb \text{ o } bRa$$

16. Definición. Sean E y F dos conjuntos. Considere una relación que a todo x de E le hace corresponder un y y uno solo de F. Esa relación se llama función (o correspondencia unívoca o aplicación), definida en E y con valores en F, y se representa por $y = f(x)$. x se llama la variable, y el valor de la función o la imagen de x por f. En otras palabras, una función es un conjunto de parejas ordenadas en el cual no hay dos parejas que tengan la primera componente igual. E se llama dominio de la función y el conjunto de imágenes, imagen de f.

17. Definición. Una función real es una función cuyo dominio e imagen son conjuntos de números reales.

18. Definición. Una función f de E en F se llama inyección si para todo $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

19. Definición. Una función f de E en F se dice sobreyectiva o sobre si $f(E) = F$.

20. Definición. Una función f de E en F se dice biyectiva o correspondencia biunívoca o $1 - 1$ sobre si es inyectiva y sobreyectiva.

21. Definición. Si f es una biyección de E en F al conjunto $f^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in f\}$ es una función que se llama función inversa de f.

22. Definición. Una función f se dice monótona si es creciente o decreciente.

23. Definición. Una función f se dice creciente en un conjunto E si para cada par de elementos x y y de E con $x \leq y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Y decreciente si $x \leq y$ implica que $f(x) \geq f(y)$.

24. Definición. Un entorno de centro x_0 y radio δ es el intervalo abierto de números reales $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y se representa por $V_\delta(x_0)$.

25. Definición. Un entorno de centro x_0 y radio δ y al cual no pertenece el punto x_0 es el conjunto $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[- \{x_0\}$ y se representa por $V_\delta^*(x_0)$.

26. Definición. Un conjunto de números reales es un conjunto que verifica los axiomas del Capítulo 1 para la suma, el producto y la relación de orden.

27. Definición. Un conjunto M de números reales es un conjunto inductivo si posee las siguientes propiedades:

1. $0 \in M$.
2. $\forall x, x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

28. Definición. Un número real es un número natural si pertenece a todo conjunto inductivo.

29. Definición. Decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si para cualquier entorno $V_\varepsilon(L)$ se puede hallar el entorno correspondiente $V_\delta^*(x_0)$ tal que si $x \in V_\delta^*(x_0)$, entonces $f(x) \in V_\delta(L)$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta_f = \delta_f(\varepsilon, x_0)$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.

30. Definición. Se dice que $f(x)$ es convergente cuando $x \to x_0$ si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

31. Definición. Una función f se dice que es continua en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Se dice que es continua sobre un conjunto E si es continua en cada uno de los puntos de E.

32. Teorema. (Algebra de los límites.) Suponga: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Entonces

a) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$.
b) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$.
c) $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = A/B$ si $B \neq 0$.

33. Definición. Una función P de la forma $P(x) = a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$, con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reales y $n \geq 0$ se llama función polinomial.

34. Definición. Una función R de la forma $R(x) = P(x)/Q(x)$, con P y Q polinomios, $Q(x) \neq 0$ se llama función racional.

35. Teorema. Suponga que f y g son funciones tales que $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ y f es continua en $x = b$, entonces $\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)]$.

36. Definición. Decimos que L es el límite a la derecha de f en $x = x_0$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, si para todo entorno $V_\varepsilon(L)$ existe un número positivo δ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

37. Definición. Decimos que L es el límite a la izquierda de f en $x = x_0$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, si para todo entorno $V_\varepsilon(L)$ existe un número positivo δ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

38. Teorema. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

39. Definición. Se dice que f es continua a la derecha en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, y f es continua a la izquierda en $x = x_0$ si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

40. Definición. Se dice que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. f es continua en $]a, b[$.
2. f es continua a la izquierda en $x = b$.
3. f es continua a la derecha en $x = a$.

41. Teorema del Sandwich. Sean f, g y h tres funciones tales que $g(x) < f(x) < h(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

42. Definición. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo δ tal que si $x \in V_\delta^*(x_0)$, entonces $f(x) > M$.

43. Definición. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si para cualquier número positivo M se puede hallar un número positivo δ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) > M$.

44. Definición. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si para todo número positivo M se puede hallar un número positivo δ tal que si $x \in V_\delta^*(x_0)$, entonces $f(x) < -M$.

45. Definición. $\lim f(x) = -\infty$ si para cualquier número positivo M se puede hallar un número positivo δ tal que si $x \in V_\delta^*(x_0)$, entonces $f(x) < -M$.

46. Definición. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede hallar un número positivo M tal que si $x > M$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

47. Definición. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si para cualquier $M_1 > 0$ se puede hallar $M_2 > 0$ tal que si $x < -M_2$, entonces $f(x) > M_1$.

48. Definición. La velocidad de un cuerpo que cae en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ es

$$\frac{\text{distancia recorrida en el tiempo transcurrido de } t_1 \text{ a } t_2}{t_2 - t_1}$$

49. Definición. Sea $f(t)$ la posición de un cuerpo en el tiempo t. El desplazamiento del cuerpo durante el tiempo que transcurre de t_1 a t_2 es $f(t_2) - f(t_1)$. La velocidad media se define como el cociente

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

50. Definición. Sea $f(t)$ la posición de un objeto en un tiempo t. La velocidad instantánea en el instante t se define como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

51. Definición. Se dice que una función f es derivable en punto x de su dominio si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

52. Teorema. Si f es derivable en x, entonces f es continua en x. La recíproca no es verdadera.

53. Teorema. (Algebra de las derivadas.) Si f y g son funciones derivables en x, entonces:

a) $(f + g)' = f' + g'$.
b) $(f \cdot g)' = fg' + gf'$.
c) $(f/g)' = (gf' - fg')/g$ si $g(x) \neq 0$.

54. Teorema. Si cada una de las funciones trigonométricas son derivables en cada punto de su dominio, entonces:

a) $(\text{sen}\, x)' = \cos x$.
b) $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$.
c) $(\text{tg}\, x)' = \sec^2 x$.
d) $(\text{cotg}\, x)' = -\text{cosec}^2 x$.
e) $(\sec x)' = \sec x\, \text{tg}\, x$.
f) $(\text{cosec}\, x)' = \text{cosec}\, x \cdot \text{cotg}\, x$.

55. Teorema. Para todo número racional r, $f(x) = x^r$ es derivable en todo punto $x_0 \in \mathscr{D}_f - \{0\}$ y $f'(x_0) = rx_0^{r-1}$.

56. Teorema. Sean f y g dos funciones: g derivable en x_0 y f derivable en $u_0 = g(x_0)$; entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y $(f \circ g)' = f'[g(x_0)]g'(x_0)$.

57. Teorema. Sea f la función recíproca de g. Si g es derivable en $f(x_0)$ y $g'[f(x_0)] \neq 0$, entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 1/g'[f(x_0)]$.

58. Definición. Sea $y = f(x)$ una función derivable en su dominio. Se llama diferencial de x a $dx = \Delta x$; dy se llama diferencial de y y se define por la relación $dy = f'(x)\Delta x$ o $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$.

59. Definición. Se llama diferencial de segundo orden la diferencial de la diferencial de primer orden, o sea,

$$d^2y = d(dy)$$

60. Teorema. Si $y = f(x)$ es derivable para todos los valores de x en su dominio, entonces $dy = f'(x)\, dx$.

61. Teorema. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convergente en x_0. Entonces:

a) $\lim_{x \to x_0} f > 0$ (respectivamente < 0) implica que existe un $\delta_f = \delta_f(x_0)$ tal que para $x \neq x_0$, $x \in \,]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[\, \cap \mathscr{D}_f \Rightarrow f(x) > 0$ (respectivamente < 0).

b) $f(x) > 0$ (respectivamente < 0) sobre $\mathscr{D}_f \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f \geq 0$ (respectivamente ≤ 0).

62. Teorema del incremento local. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y derivable en x_0. Entonces $f'(x_0) > 0$ (respectivamente < 0) $\Rightarrow f$ conserva el orden localmente (respectivamente invierte el orden) en x_0.

63. Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Decimos que:

a) $f(x_0)$ es el màximo global de f (respectivamente mínimo) sobre $\mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ [respectivamente $\geq f(x_0)$].

b) $f(x_0)$ es el máximo local (respectivamente mínimo) de $f \Leftrightarrow$ existe un $\delta_f = \delta_f(x_0)$ tal que $f(x_0)$ es el máximo global (respectivamente mínimo) de la restricción de f a $]x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f[$ según *a*).

64. Teorema del extremo estacionario. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$. Entonces $x_0 \in]a, b[$ y f es derivable en x_0 y $f(x_0)$ un extremo local de f implica que $f'(x_0) = 0$.

65. Definición. Por un punto crítico se entiende un punto estacionario, es decir, de derivada cero; un punto donde no existe la derivada o un punto extremo del dominio.

66. Teorema de Rolle. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y f derivable sobre $]a, b[$. Entonces $f(a) = f(b) = 0$ implica que existe un $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

67. Teorema del valor medio para primeras derivadas. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$. Entonces existe c tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ y $c \in]a, b[$.

68. Teorema de la función constante. Hipótesis, las del teorema de Rolle. Entonces $f'(x) = 0$ sobre $]a, b[\Rightarrow f(x) = C$, C una constante.

69. Teorema de monotonía. Hipótesis, las mismas del teorema del valor medio. Entonces $f' > 0$ (respectivamente < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow f$ conserva el orden (respectivamente invierte el orden) sobre $[a, b]$.

70. Teorema del tenedor. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f continua sobre $[a, b]$ y f derivable sobre $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Entonces:

a) $f' > 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f' < 0$ sobre $]x_0, b[\Rightarrow f(x_0) = \max f$ sobre $[a, b]$.
b) $f' < 0$ sobre $]a, x_0[$ y $f' > 0$ sobre $]x_0, b[\Rightarrow f(x_0) = \min f$ sobre $[a, b]$.

71. Teorema del valor medio para segundas derivadas. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$; f y f' continuas sobre $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Entonces para todo $x \in [a, b]$ existe un c tal que $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = f''(x - x_0)^2/2$ y $x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x$.

72. Teorema de la aproximación lineal. Sea $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, f y f' continuas sobre $[a, b]$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$. $I(x) = f(a) + [f(b) - f(a)](x - a)/(b - a)$ (interpolante). $E(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ (extrapolante). Entonces:

a) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) - I(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - a)(x - b)$. Error que se comete al aceptar el interpolante como aproximación de $f(x)$.

b) Existe $c \in]a, b[$ tal que $f(x) - E(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2$. Error que se comete al aceptar el extrapolante como aproximación de $f(x)$.

c) Si $|f''(x)| \leq M$ sobre $]a, b[$, entonces $|f(x) - I(x)| \leq \frac{1}{2} M |(x - a)(x - b)|$ y $|f(x) - E(x)| \leq \leq \frac{1}{2} M (x - x_0)^2$.

73. Definición. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Decimos que f es:

a) Cóncava (convexa) hacia arriba (respectivamente hacia abajo) en $(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow E_1(x) > 0$ (respectivamente < 0) para todo $x \in \mathcal{D}_f - \{x_0\}$, en un entorno de x_0, para el cual $E_1(x) = f(x) - E(x)$ y $E_2(x) = f(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$. En otras palabras, el grafo de f está localmente por encima (respectivamente por debajo de la tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$.

b) Tiene un punto de inflexión en $(x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow$ que la restricción de f a $\mathcal{D}_f \cap [x_0, \infty)$ es cóncava hacia arriba (respectivamente hacia abajo) y la restricción de f a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, x_0]$ es cóncava hacia abajo (respectivamente hacia arriba) en $(x_0, f(x_0))$.

74. Teorema de concavidad. Sea $f:]a, b[\to \mathbf{R}$, f derivable sobre $]a, b[$ y f derivable dos veces en $x_0 \in]a, b[$. Entonces:

a) $f''(x_0) > 0$ (respectivamente < 0) $\Rightarrow$ el grafo de f es cóncavo hacia arriba (respectivamente hacia abajo) en $(x_0, f(x_0))$.

b) f es dos veces derivable sobre $]a, b[$ y $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ en $a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de f.

75. Teorema del extremo global cóncavo. Hipótesis, las mismas del teorema de concavidad. Entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ (respectivamente > 0) $\Rightarrow f(x_0)$ es un máximo local (respectivamente mínimo).

76. Definición de concavidad sobre un intervalo. Sea $f\colon]a, b[\to \mathbf{R}$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$, se dice que el grafo de f es cóncavo hacia arriba (respectivamente hacia abajo) sobre $]a, b[\Leftrightarrow f'' > 0$ (respectivamente < 0) sobre $]a, b[$.

77. Teorema de la cuerda tangente. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, f dos veces derivable sobre $]a, b[$, f y f' continuas sobre $[a, b]$. $E_2(x) = f(x) - I(x)$; $E_1(x) = f(x) - E(x)$. Entonces $f'' > 0$ (respectivamente < 0) sobre $]a, b[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_2 \leq 0 \text{ (respectivamente } \geq 0) \\ E_1 \geq 0 \text{ (respectivamente } \leq 0) \end{array} \right\}$ sobre $[a, b]$.

78. Teorema del extremo global cóncavo. Sea f una función $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathscr{D}_f$ un intervalo, f dos veces derivable sobre el interior de $\mathscr{D}_f$, f continua sobre $\mathscr{D}_f$. Entonces $f'(x_0) = 0$ y $f'' < 0$ (respectivamnete > 0) sobre el interior de $\mathscr{D}_f \Rightarrow f(x_0) = \max f$ (respectivamente min f).

Bibliografía

Apostol, M. Tom: *Cálculo*, Vols. I y II. Bleisdel P. Co. Waltham, Massachusetts, 1971.
Bartle, R.; Tulcea, C. I.: *Calculus*. Scott-Foresman & Co. Glenview, Illinois, 1968.
Bell-Blum-Lewis & Rosenblatt: *Introductory Calculus*. Holden Day. Nueva York, 1966.
Britton, J. J.; Kriegh, R.: *Matemáticas Universitarias*. SECSA. México, 1968.
Burrill-Knudsen: *Real Variables*. Holt, Rinehart & Wiston. Nueva York, 1969.
Chover, Joshua: *The Green Book of Calculus*. W. A. Benjamin. Nueva York, 1972.
Combes, A.: *Exercises et Problemes de Mathematiques*. Libraire Vuibert. París, 1969.
Curtis, C. Philip: *Calculus*, Vols. I y II. John Wiley & Sons. Nueva York, 1972.
Demidovich: *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Mir. Moscú.
Flanders-Korthage-Price: *Calculus*. Academic Press. Nueva York, 1970.
Goffman, Casper: *The Calculus*. Harper & Row. Nueva York, 1971.
Gunzburg: *Calculus Problems & Solutions*. Holden Day. Nueva York, 1963.
Haaser, La Salle-Sullivan: *Análisis Matemático*. Editorial Trillas. México, 1970.
Hans, M. E., Gambill, R.: *Calculus*. Holt, Wiston & Rinehart. Nueva York, 1969.
Kaplan, W.; Lewis, D. J.: *Calculus & Linear Algebra*. John Wiley & Sons. Nueva York, 1971.
Kitchen, J. W.: *Calculus of One Variable*. Addison Wesley P. Co. Reading, Massachusetts, 1969.
Kurtz, A.: *Calculus Suplement*. W. A. Benjamin. Nueva York, 1970.
Laboreur, M.: *Calcul Mathematique*. Librairie Polytechnique Beranger. París, 1963.
Leithold, L.: *The Calculus*: Harper & Row. Nueva York, 1972.
Lightstone, A. H.: *Concepts of Calculus*. Harper & Row. Nueva York, 1965.
Munroe: *Calculus*. W. E., Saunders. Filadelfia, 1970.
Olmsted, J. H.: *Calculus with Analytic Geometry*. Appleton Century Crofts. 1966.
Ostrowski: *Differential and Integral Calculus*. Scott Foresman & Co. Glenview, Illinois, 1968.
Pisot, C.; Zamansky, M.: *Matemáticas Generales*. Montaner y Simón. Barcelona, 1966.
Seeley, T. Robert: *Calculus of One Variable*. Scott Foresman. Glenview, Illinois, 1968.
Silverman, R. A.: *Modern Calculus and Analytic Geometry*. The McMillan Co. Nueva York, 1969.
Simon, B. Arthur: *Calculus*: The McMillan Co. Nueva York, 1970.
Stein, S. K.: *Cálculo en las Primeras tres Dimensiones*. McGraw Hill Book. Co. Nueva York, 1972.
Taylor, H. E.; Wade, T. L.: *Cálculo Diferencial e Integral*. Limusa Wiley. México, 1962.
Thomas, G. B.: *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar. Madrid, 1971.

Indice

Algebra, 277
Algebra de diferenciales, 170
Algebra de los valores absolutos, 25
demostraciones, 26
Angulo entre dos grafos, 137
Aplicación o correspondencia unívoca, 300
Area de un triángulo, 289
Asíntota, 257
de la curva, 257
horizontal, 257
vertical, 257
Axiomas, de cuerpo, 9
de orden, 11

Binomio, de Newton, 277
teorema del, 277
Biyección, 300

Cálculo, 282
Cartesiano, producto, 299
Cauchy, teorema del valor medio, 217
Círculo, 286
Combinaciones, 280
Complemento, 299
Concavidad, 250
Cónicas, ecuaciones, 290
Conjunto de los números positivos, 11
Construcción de curvas de la forma $y = f(x)$, 256
Continuidad, 103, 127, 300.
Coordenadas, cartesianas, 188
polares, 291
rectangulares, 291
transformación, 291
Cosenos directores, 292
Curvas particulares, 256

Decreciente, función, 300
Derivabilidad, 127
Derivación, de ecuaciones paramétricas, 136
de las funciones algebraicas, 128
de las funciones trigonométricas, 130
Derivación, en cadena, 132
implícita, 134
Derivada, 124, 250
aplicaciones geométricas de la, 137
de la función recíproca, 133
Derivadas (tablas), 284
de orden superior, 133
Desigualdad de Cauchy-Schwarz, 14
Desigualdad triangular, 13
Desigualdades, 12
Determinantes, de segundo orden, 281
de tercer orden, 281
Diferencia de conjuntos, 299
Diferenciales, 169
álgebra de, 170
de órdenes superiores, 170
Discontinuidad, 103, 105
evitable, 105
Distancia entre dos puntos, 289, 292
Dominio de una función, 300

Ecuación, cuadrática, 280
cúbica, 280
Ecuaciones, cónicas, 290
de una recta, 290
Elipse, 286, 290
Entorno, 49, 300
Equivalencia, 299
Error, 50
Extremos de las funciones, 190

Factores y desarrollos, 278
Factoriales, 279
Función, constante (teorema), 213
continua, 104, 300
convexa, 254
creciente, 188, 203, 300
decreciente, 188, 203, 300
definición, 300
derivable, 124
exponencial, 282
homográfica, 262
impar, 258
inversa, 300
monótona, 300
Función, par, 258
racional, 301
Funciones, algebraicas, derivación, 128
extremos de las, 190
logarítmicas, 283
trigonométricas, 130, 283, 295

Geometría, 286
Geometría analítica del espacio, 292
Geometría analítica plana, 289
Glosario, 299
Grafos, trazado de, 256

Hipérbola, 290

Inducción, demostración por, 34
Inducción matemática, principio de, 35
Inductivo, conjunto, 300
Infinito, límite, 78, 301
Inflexión, puntos de, 256
Intereses y anualidades, 278
Intersección, 299
Intervalos, 297
Inyección, 300

Ley de transitividad, 11
Ley de tricotomía, 11
Leyes de exponentes, 277
Leyes fundamentales, 277
L'Hospital, regla de, 218, 301
Límite, de funciones (teoremas), 55
de la raíz de una función (teorema), 57
de una función, 45
definición, 300
infinito, 301
por la derecha, 300
por la izquierda, 300
Límites de la forma lim $f(x)^{g(x)} = C$, 85
Límites laterales, 70
Límites que contienen infinito, 78
Longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, 138

Máximos y mínimos, 190, 203, 303

Nomenclatura, 285
Números, complejos, 277
naturales, 34, 92
reales, 9

Orden, parcial, 300
preservación del, 188
relación, 300
total, 300

Paralelepípedo, 287
Paralelogramo, 287
Pendiente de una recta, 289
Permutaciones, 279
Pirámide, 287
Plano, ecuación, 292
Polígono regular, 287
Polos, 105
Positividad, 11
Preservación de la continuidad, 103
Preservación del orden, 188
Principio de buena ordenación, 35
Principio de inducción completa, 35
Prisma, 288
Producto cartesiano, 299
Progresión, aritmética, 279
geométrica, 279
Prolongación continua, 105
Proximidad, 28
Prueba de la primera derivada, 215
Prueba de la segunda derivada, 215

Razones y velocidad, 177
Reales, números, 9
Recíproca, aplicación, 300
Recta, ecuaciones de una, 290
Recurrencia, demostración por, 34
Regla de L'Hospital, 218
Relación, 299
Rolle, teorema de, 159, 209

Serie, de Maclaurin, 282
de Taylor, 282
Símbolos, 297-298
Sobreyección, 300
Subconjunto, 11, 299
Suma de números, 279

Tablas, funciones trigonométricas, 295
Tangente a una curva, 256
Técnicas para hallar máximos o mínimos, 192
Tenedor, teorema del, 214
Teoremas:
álgebra de las derivadas, 128
de acotación, 104
de aproximación lineal, 251
de concavidad, 250
de la cuerda tangente, 251
de la diferencia constante, 214
de la función constante, 213
de la tangente, 294
de monotonía, 214
de Rolle, 159, 209

Teoremas:
del binomio, 277
del cero, 105
del coseno, 294
del extremo global cóncavo, 251
del extremo local cóncavo, 250
del incremento local, 189
del sandwich, 58
del seno, 294
del tenedor, 214
del valor extremo, 104
del valor intermedio, 105
del valor medio de Cauchy, 217
del valor medio para primeras derivadas, 209
del valor medio para segundas derivadas, 246
fundamentales sobre las funciones continuas, 104
límite de la raíz de una función, 57
principio de inducción matemática, 35
sobre límites de funciones, 55
Trazado de grafos, 256
Trigonometría, 293

Valor absoluto, 12, 25
desigualdad triangular, 12
Variación, tablas de, 259-269
Velocidad, 177, 302

06-316988-5